高三数学试卷参考答案

1.C　因为$A=\{x|-1<x<\frac{3}{2}\}$，$B=\{x|0<x<5\}$，所以$A\cap B=(0,\frac{3}{2})$.

2.B　$z=\frac{2}{1+i}=1-i$，则$|z+3+2i|=|4+i|=\sqrt{17}$.

3.B　$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，当$\omega=\pi$时，$f(x)$的最小正周期为2，当$f(x)$的最小正周期为2时，$\omega=\pm\pi$，故选B.

4.A　取A_1B_1的中点G，连接EG，FG(图略)，因为E，F分别为AB，A_1D_1的中点，所以$EG/\!/BB_1$，$FG/\!/B_1D_1$. 又EG，$FG\not\subset$平面BB_1D_1，所以$EG/\!/$平面BB_1D_1，$FG/\!/$平面BB_1D_1，故平面$EFG/\!/$平面BB_1D_1. 又$EF\not\subset$平面BB_1D_1，所以$EF/\!/$平面BB_1D_1，A正确. 可证得B，C，D不正确.

5.D　当$n=1$时，$S_1=a_1$，当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$，
所以$a_n=(2n-1)a_1$，所以$a_2=3a_1$，所以$q=3$，则$a_{k_3}=a_1\times3^4=81a_1$，又因为$a_{k_3}=(2k_3-1)a_1=81a_1$，所以$2k_3-1=81$，则$k_3=41$.

6.C　设$\triangle PF_1F_2$内切圆的半径为r，因为P为椭圆C上的一点，所以$C_{\triangle PF_1F_2}=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=12$，$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_P|=\frac{1}{2}C_{\triangle PF_1F_2}r$，则$6r=2|y_P|\leqslant4\sqrt{3}$，所以$r\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7.A　因为$|x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\geqslant\frac{3}{4}$，则$x^2\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\geqslant\frac{3}{4}$，即$x^2+2x\cos\theta+\frac{1}{4}\geqslant0$恒成立，$\Delta=4\cos^2\theta-1\leqslant0$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$，故$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角的取值范围是$[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$.

8.C　由图可知，$f(x)=k\sqrt{x}$的图象经过点$B(4,4)$，则$f(x)=2\sqrt{x}$.
再由$B(4,4)$，$C(8,0)$，可知直线BC的方程为$y=-x+8$.
设$E(x,2\sqrt{x})$，则$D(x,0)$，$F(8-2\sqrt{x},2\sqrt{x})$，即直角梯形$CDEF$的面积$S=\frac{1}{2}(8-2\sqrt{x}-x+8-x)\times2\sqrt{x}=16\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2x$. 由题意知，$S=16\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2x$，$0<x<4$，令$t=\sqrt{x}$，则$S(t)=16t-2t^3-2t^2$，$0<t<2$，则$S'(t)=16-6t^2-4t=-2(t+2)(3t-4)$，当$t=\frac{4}{3}$时，直角梯形$CDEF$的面积最大，最大值为$\frac{352}{27}$.

9.BCD　甲得到A卡片与乙得到A卡片不可能同时发生，但可能同时不发生，所以“甲得到A卡片”与“乙得到A卡片”为互斥但不对立事件，A不正确，B正确. 甲得到A卡片的概率为$\frac{A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，C正确. 甲、乙2人中有人得到A卡片的概率为$\frac{C_2^1A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{2}$.

10.BC　依题意可得$\sqrt{a^2+1^2}<||a|-2|$或$\sqrt{a^2+1^2}>|a|+2$，解得$-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{4}$，
又$a^2>0$，所以$-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{4}$且$a\neq0$.

11.ABD　因为函数$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$，$y=10^x$与$y=\lg x$的图象均关于直线$y=x$对称，设$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与$y=10^x$图象的交点为A，$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与$y=\lg x$图象的交点为B，则$A(x_1,10^{x_1})$与$B(x_2,\lg x_2)$也关于直线$y=x$对称，则$x_1=\lg x_2$，$x_2=10^{x_1}$.
因为$\frac{x_1}{x_1-1}-10^{x_1}=0$，所以$\frac{x_1}{x_1-1}=x_2$，则$x_1+x_2=x_1x_2$，即$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$.
因为$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$的图象与直线$y=x$的交点为$(2,2)$，所以$x_1+x_2>4$，

$x_1x_2=x_1\cdot 10^{x_1}$，$x_1\in(1,2)$，则 $10<x_1x_2<200$.

12. AB　依题意得，$p=2$，$y^2=4x$，由 $|AM|^2+|AN|^2=|AF|^2=4$，得 $|AM|^2+|AN|^2\geqslant 2|AM|\cdot|AN|$，所以 $|AM|\cdot|AN|\leqslant 2$，当且仅当 $|AM|=|AN|=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以四边形 $AMFN$ 面积的最大值为 2，故 A 正确.

由 $|AM|^2+|AN|^2=(|AM|+|AN|)^2-2|AM|\cdot|AN|$，得 $(|AM|+|AN|)^2\leqslant 8$，即 $|AM|+|AN|\leqslant 2\sqrt{2}$，所以四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$，故 B 正确.

设直线 BC 的方程为 $x=my+1$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消 x 得 $y^2-4my-4=0$，则 $|BC|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=4(1+m^2)$，同理 $|DE|=4(1+\frac{1}{m^2})$，

$\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(m^2+1)}+\frac{m^2}{4(m^2+1)}=\frac{1}{4}$，故 C 不正确.

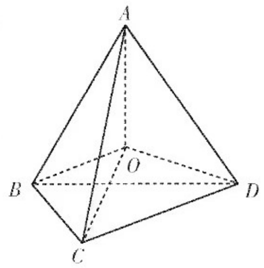
$\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|BC|}\cdot\frac{1}{|DE|}}$，所以 $|BC|\cdot|DE|\geqslant 64$，当且仅当 $|BC|=|DE|=8$ 时，等号成立，此时 $S_{BDCE}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|DE|\geqslant 32$，故 D 不正确.

13. 40　$(y+1)(x-2)^5=y(x-2)^5+(x-2)^5$，$y(x-2)^5$ 的展开式中 x^3y 项为 $y\cdot C_5^3x^3\cdot(-2)^2=40x^3y$，$(x-2)^5$ 的展开式中没有 x^3y 项，故 $(y+1)(x-2)^5$ 的展开式中含 x^3y 项的系数为 40.

14. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$　由题意得 $\alpha-\beta$，$\alpha+\frac{\pi}{6}$ 均为锐角，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\cos(\beta+\frac{\pi}{6})=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{6})-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$.

15. $(0,2)$　令函数 $g(x)=f(x)+x+1$，因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,-1)$ 对称，所以 $g(x)$ 的图象关于原点对称，故 $g(x)$ 是定义在 $(-5,5)$ 上的奇函数. 因为 $f(x)$ 是定义在 $(-5,5)$ 上的增函数，所以 $g(x)$ 也是定义在 $(-5,5)$ 上的增函数. 由 $f(2x+1)+f(x-1)+3x+2>0$，得 $f(2x+1)+2x+1+1>-[f(x-1)+x-1+1]$，则 $g(2x+1)>-g(x-1)=g(-x+1)$，则 $\begin{cases}2x+1>-x+1,\\ -5<2x+1<5,\\ -5<-x+1<5,\end{cases}$ 解得 $0<x<2$，故原不等式的解集为 $(0,2)$.

16. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　如图，连接 AB，AC，AD，BC，CD，BD，得到正四面体 $ABCD$，则点 O 为正四面体 $ABCD$ 外接球的球心.



设 $AB=2a$，外接球的半径为 R，则 $R^2-(\frac{2\sqrt{6}a}{3}-R)^2=\frac{4}{3}a^2$，则 $R^2-(\frac{2\sqrt{6}a}{3}-R)^2=\frac{4}{3}a^2$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，则 $\cos\angle AOB=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}=-\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\angle AOB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. 解：(1) 当 $n=1$ 时，$2\sqrt{a_1}=a_1+1$，得 $a_1=1$. ……………………………… 1 分

由 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$，有 $4S_n=(a_n+1)^2$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$，②

由①－②得 $4(S_n-S_{n-1})=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$，……………………………… 2 分

即 $4a_n=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$，化简得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. ……………… 3 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，……………………………… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，故 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ……………… 5 分

(2)由(1)知，$S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}=n^2$. …… 7分

$\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}[1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$， …… 9分

所以 $T_n=\frac{n}{4}+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{4}+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n^2+n}{4n+2}$. …… 10分

18.(1)证明：因为 $b^2=2ac\cos B$，所以 $\sin^2B=2\sin A\sin C\cos B$. …… 1分

又 $\sin B=\sin(A+C)$，所以 $\sin(A+C)\sin B=2\sin A\sin C\cos B$， …… 2分

所以 $(\cos A\sin C+\cos C\sin A)\sin B=2\cos B\sin A\sin C$， …… 3分

所以 $\cos A\sin C\sin B+\cos C\sin A\sin B=2\cos B\sin A\sin C$， …… 4分

所以 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2\cos B}{\sin B}$，所以 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2}{\tan B}$. …… 6分

(2)解：因为 $a=2b\sin C$，所以 $\sin A=2\sin B\sin C$，所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$，所以 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$. …… 7分

又△ABC 为锐角三角形，所以 $\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}>0$，

所以 $\tan B\tan C>1$，所以 $\tan A\tan B\tan C=-\tan(B+C)\tan B\tan C=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\cdot\tan B\tan C=\frac{2\tan^2B\tan^2C}{\tan B\tan C-1}$. …… 9分

令 $\tan B\tan C-1=t$，则 $\tan B\tan C=t+1$，

$\tan A\tan B\tan C=\frac{2(t+1)^2}{t}=\frac{2t^2+4t+2}{t}=(2t+\frac{2}{t})+4\geqslant8$. …… 11分

当 $t=1$，即 $\tan B\tan C=2$ 时，$\tan B+\tan C=4$，$\tan A=4$，$\tan A\tan B\tan C$ 的最小值为 8. …… 12分

19.(1)证明：因为 $PD\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $PD\perp AB$. …… 1分

又 $DE\perp$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $DE\perp AB$. …… 2分

因为 $DE\cap PD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PDF. …… 3分

又 $PF\subset$ 平面 PDF，所以 $AB\perp PF$. …… 4分

又 $PA=PB$，所以 F 是 AB 的中点. …… 5分

(2)解：以 P 为坐标原点，PA，PB，PC 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $Pxyz$(图略)，不妨设 $PA=2$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,2)$，$F(1,1,0)$. …… 6分

易知 $PC\perp$ 平面 PAB，因为 $DE\perp$ 平面 PAB，所以 $PC/\!/DE$.

由正三棱锥的性质可知，点 D 是△ABC 的重心，所以 $\frac{CD}{DF}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{PE}{EF}=\frac{2}{1}$，

则 $E(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0)$，$\overrightarrow{EB}=(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-2,2)$. …… 8分

设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y=0,\\-2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$. …… 9分

由题可知，$\overrightarrow{PA}=(2,0,0)$ 为平面 BCP 的一个法向量， …… 10分

设平面 EBC 与平面 PBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{PA}|}=\frac{4}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. …… 12分

20.解：(1)①设红球的个数为 n，则 $P=\frac{C_{6-n}^1C_n^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，解得 $n=3$，所以红球的个数为 3. …… 2分

②X 的所有可能取值为 0，1，2，

则 $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{3}{5}$， …… 5分

故随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$. ……………………………… 7 分

(2)设球的总个数为 $2m$,则红球的个数为 m,

则 $P=1-\frac{C_m^2}{C_{2m}^2}=1-\frac{m(m-1)}{2m(2m-1)}=\frac{3m^2-m}{4m^2-2m}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8m-4}\leqslant\frac{11}{14}$, ……………………………… 10 分

解得 $m\geqslant4$,所以盒子中球的总个数的最小值为 8. ……………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ 时,$|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 2 分

又 $a^2+b^2=4$,所以 $a^2=3,b^2=1$. ……………………………… 3 分

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. ……………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时,$|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$|QF|=c=2$,则 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{3}$.

当直线 l 的斜率为 0 时,不符合题意. ……………………………… 5 分

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时,设 l 的方程为 $y=k(x-2)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1-3k^2)x^2+12k^2x-12k^2-3=0$.

因为 l 与 C 的右支相交于 M,N 两点,所以 $k^2>\frac{1}{3}$,且 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}$,

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{3k^2-1}$. ……………………………… 7 分

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{4k}{3k^2-1}$,所以线段 MN 的中点 $R(\frac{6k^2}{3k^2-1},\frac{2k}{3k^2-1})$,所以线段 MN 的垂直平分线方程为 $y-\frac{2k}{3k^2-1}=-\frac{1}{k}(x-\frac{6k^2}{3k^2-1})$. ……………………………… 8 分

由题意可知 Q 为 MN 的垂直平分线与 y 轴的交点,令 $x=0$,得 $y=\frac{8k}{3k^2-1}$,即 $Q(0,\frac{8k}{3k^2-1})$,则 $|QF|=\sqrt{4+(\frac{8k}{3k^2-1})^2}=\frac{2\sqrt{9k^4+10k^2+1}}{3k^2-1}$, ……………………………… 9 分

则 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{\frac{9k^2+1}{3k^2+3}}=\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}$. ……………………………… 10 分

因为 $k^2>\frac{1}{3}$,所以 $1<\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}<\sqrt{3}$. ……………………………… 11 分

综上所述,$\frac{|QF|}{|MN|}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{3}]$. ……………………………… 12 分

22. 解:(1)设 $h(x)$ 与 $y=f(x)$ 相切的切点坐标为 $A(x_1,e^{x_1})$,与 $g(x)=\ln(x+1)+1$ 相切的切点坐标为 $B(x_2,\ln(x_2+1)+1)$. 因为 $f'(x)=e^x$,$g'(x)=\frac{1}{x+1}$, ……………………………… 1 分

所以 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2+1}=\frac{e^{x_1}-\ln(x_2+1)-1}{x_1-x_2}$,则 $\frac{1}{x_2+1}=\frac{\frac{1}{x_2+1}+x_1-1}{x_1-x_2}$,整理得 $x_1x_2=0$. ……………………………… 3 分

若 $x_1=0$,则 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2+1}=1$,则 $x_2=0$;若 $x_2=0$,则 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2+1}=1$,则 $x_1=0$. ……………………………… 4 分

故 $x_1=x_2=0$，切点 $A(0,1)$，则 $h(x)=x+1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)令函数 $F(x)=f(x)-\frac{g(x-1)}{x}-1=\frac{1}{x}(xe^x-x-\ln x-1)=\frac{1}{x}(e^{x+\ln x}-x-\ln x-1)$.

令函数 $\varphi(x)=e^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$. 当 $x\in(-\infty,0)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增. 故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，则 $F(x)\geqslant0$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 时，等号成立. … 7 分

令函数 $G(x)=x+\ln x$，显然 $G(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为 $G(\frac{1}{e})<0$，$G(1)>0$，所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{e},1)$，$G(x_0)=x_0+\ln x_0=0$，则 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=\frac{g(x_0-1)}{x_0}+1$. ………………………………………… 8 分

又 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant\frac{g(x-1)}{x}+1$ 对 $x\in(0,+\infty)$恒成立，所以 $f(x_0)\geqslant h(x_0)\geqslant\frac{g(x_0-1)}{x_0}+1=f(x_0)$，所以 $f(x_0)=h(x_0)$，即 $e^{x_0}=kx_0+b$. ………………………………………………………………………… 10 分

令函数 $M(x)=e^x-kx-b$，则 $M'(x)=e^x-k$. 由 $M(x)\geqslant0=M(x_0)$，知 $x=x_0$ 是 $M(x)$的一个极小值点，则 $M'(x_0)=e^{x_0}-k=0$. ………………………………………………………………………… 11 分

由 $x_0+\ln x_0=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，则 $k-b=kx_0=x_0e^{x_0}=1$，则 $h(x)=kx+k-1$，故直线 $y=h(x)$经过点$(-1,-1)$.
…………………………………………………………………………………………………… 12 分