黄山市 2023 届高中毕业班第二次质量检测

数学参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	B	B	C	D	A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	CD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 【答案】32　14.【答案】$\dfrac{20}{11}$　15. 【答案】2　16.【答案】$-\dfrac{67}{6}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分

解：（1）根据频率分布直方图估计该校全体学生成绩的众数为：65，　……………1 分

平均数 $\bar{x}=45\times0.06+55\times0.12+65\times0.4+75\times0.26+85\times0.1+95\times0.06=69$　…3 分

设第 71 百分位数为 x，则

$0.06+0.12+0.4+(x-70)\times0.026=0.71$，$\therefore x=75$　…………………5 分

（2）根据频率分布直方图，

$\because 60\times\dfrac{800}{3000}+63\times\dfrac{1000}{3000}+\overline{x_3}\times\dfrac{1200}{3000}=69$，$\therefore \overline{x_3}=80$　……………………………7 分

高中三个年级的总体样本方差为140，

又

$$\because \frac{800}{3000}\times\left[(60-69)^2+75\right]+\frac{1000}{3000}\times\left[(63-69)^2+s_2^2\right]+\frac{1200}{3000}\times\left[(80-69)^2+55\right]=140,$$

$\therefore s_2^2=48$　…………………………………………………………………10 分

18. (本小题满分 12 分)

解：（1）$\because b^2+c^2-a^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$，

$$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A$$，即 $\tan A=\sqrt{3}$，

$A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$；……………………………………………………2 分

又 $b=3,c=6$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=27$，

$\therefore a=3\sqrt{3}$，又 $b=3,c=6$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{2}$，……………………………………3 分

由 $PB=PC$ 可知 P 为中点，

$\because CP=\dfrac{1}{2}CB=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$CQ=\dfrac{3}{2}$，$\therefore AP=\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$，$BQ=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$，

$\cos\angle APB=-\cos\angle APC=-\dfrac{PC}{AP}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7},\sin\angle APB=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\sin\angle QBC=\dfrac{\sqrt{13}}{13},\cos\angle QBC=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$ ……………………………4 分

$\therefore\cos\angle AMB=\cos(\angle QBC+\angle APB)=\cos\angle QBC\cos\angle APB-\sin\angle QBC\sin\angle APB$

$$=\frac{2\sqrt{39}}{13}\times\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)-\frac{\sqrt{13}}{13}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=-\frac{8\sqrt{91}}{91}$$ ………………6 分

（2）设 $\mathrm{PC}=x,x\in(0,3\sqrt{3}]$，记 $\angle\mathrm{APQ}=\theta,\angle APC=\alpha,\angle QPC=\beta$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ……………………………………………8 分

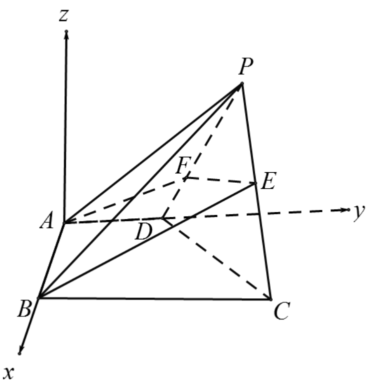
$=\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{3}{2x}}{1+\frac{3}{x}\cdot\frac{3}{2x}}=\dfrac{3}{2x+\frac{9}{x}}\le\dfrac{3}{2\sqrt{2x\cdot\frac{9}{x}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ………………………………………10 分

当且仅当 $2x=\dfrac{9}{x}$，即 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 取等号. ……………………………………11 分

当 $x=0$ 时，不符合题意. ……………………………………………12 分

19. (本小题满分 12 分)

解：因为 $\angle ABC=90^0$，$AD//BC$，且 $AD=AB=\dfrac{1}{2}BC=2$，取 BC 边的中点 M，连结 DM，则 $DM=MC=2$，且 $DM\perp MC$，



所以 $DC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.又 ΔPDC 是 $\angle DPC$ 为直角的等腰直角三角形，所以 $DP=CP=2$.

过点 P 作 $PN\perp CD$ 的交 CD 于 N 点，则 N 为 CD 的中点，且 $PN=\sqrt{2}$.因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且交于 CD，

所以 $PN\perp$ 平面 $ABCD$.故以 AB，AD 所在的直线分别为

x轴，y轴，过点 A 作垂直于平面 $ABCD$ 的为 z 轴,建立空间直角坐标系如图所示.

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$C(2,4,0)$，$P(1,3,\sqrt{2})$，

而 E 为棱 PC 的中点，所以 $E(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，又点 F 在棱 PD 上，且 $PF=2FD$.

故 $F(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$ ……………………………………………………………3 分

（1）证明：$\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，令 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AF}$

则 $(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\lambda(2,0,0)+\mu(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{3}{2}$，故

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$，则向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ 共面，且向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ 有公共点 A，

所以 A、B、E、F 四点共面。 ……………………………………………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{BP}=(-1,3,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{BA}=(-2,0,0)$，

令平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\bullet\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BA}\bullet\vec{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+3y_1+\sqrt{2}z_1=0\\ -2x_1=0\end{cases}$，所以可以取 $\vec{n}=(0,1,-\frac{3\sqrt{2}}{2})$ ……8

分

令平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\bullet\vec{m}=0\\ \overrightarrow{BC}\bullet\vec{m}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+3y_2+\sqrt{2}z_2=0\\ 4y_2=0\end{cases}$，所以可以取 $\vec{m}=(1,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ……10 分

于是 $\cos\theta=\left|\cos<\vec{n},\vec{m}>\right|=\frac{|\vec{n}\bullet\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{9}{2}}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$ ………………12 分

20. （本小题满分 12 分）

解：（1）由题意，可设5G 商用初期，该区域市场中采用 A 公司与 B 公司技术的智能终端产品的占比分别为 $a_0=55\%=\frac{11}{20}$，$b_0=45\%=\frac{9}{20}$.

易知经过 n 次技术更新后 $a_n+b_n=1$，

则 $b_{n+1}=(1-20\%)b_n+5\%a_n=\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{20}$，则 $b_{n+1}=\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{20}(n\in N)$ …………2 分

由①式，可设 $b_{n+1}-\lambda=\frac{3}{4}(b_n-\lambda)\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{3}{4}b_n+\frac{\lambda}{4}$，对比①式可知 $\frac{\lambda}{4}=\frac{1}{20}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}$.

……………………………………………………………………………………4 分

又$b_1=\frac{3}{4}b_0+\frac{1}{20}=\frac{31}{80}$， $b_1-\frac{1}{5}=\frac{3}{16}$，

从而当$\lambda=\frac{1}{5}$时，$\{b_n-\frac{1}{5}\}$是以$\frac{3}{16}$为首项，$\frac{3}{4}$为公比的等比数列． ………………5 分

（2）由（1）可知$b_n-\frac{1}{5}=\frac{3}{16}(\frac{3}{4})^{n-1}=\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n$， ………………………………………6 分

所以经过n次技术更形后，该区域市场采用A公司技术的智能终端产品占比

$a_n=1-b_n=\frac{4}{5}-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n$， ………………………………………………………………7 分

由题意，令$a_n>75\%$，得$\frac{4}{5}-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^n>\frac{3}{4}\Leftrightarrow(\frac{3}{4})^n<\frac{1}{5}\Leftrightarrow n\lg\frac{3}{4}<\lg\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow n>\frac{-\lg 5}{\lg 3-2\lg 2}=\frac{\lg 5}{2\lg 2-\lg 3}=\frac{1-\lg 2}{2\lg 2-\lg 3}=\frac{1-0.301}{2\times 0.301-0.477}=5.592>5$， …10 分

又$n\in N^*$，故$n\geq 6$，

即至少经过6次技术更新，该区域市场采用A公司技术的智能终端产品占比能达到75%以上．

……………………………………………………………………………………12 分

21. （本小题满分 12 分）

解：（1）解：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)$， $f'(x)=2x+\frac{a}{1-x}=\frac{-2x^2+2x+a}{1-x}$

……………………………………………………………………………………1 分

记$g(x)=-2x^2+2x+a$，

①当$\Delta\leq 0$，即$a\leq-\frac{1}{2}$时，$g(x)\leq 0$，

$\therefore f'(x)\leq 0$，此时$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减． ………………………………………2 分

②当$\Delta>0$，即$a>-\frac{1}{2}$，由$g(x)=0$得$x_1=\frac{1-\sqrt{1+2a}}{2}$， $x_2=\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2}$

当$-\frac{1}{2}<a<0$时，由$f'(x)>0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow x\in(x_1,x_2)$，

由$f'(x)<0\Rightarrow g(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,1)$

$\therefore f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1+2a}}{2}\right)$单调递减，在$\left(\frac{1-\sqrt{1+2a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2}\right)$单调递增，在

$\left(\dfrac{1+\sqrt{1+2a}}{2},1\right)$单调递减；　　……………………………………………………4 分

当$a\ge 0$时，由 $f^{'}(x)>0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{1+2a}}{2},1\right)$，

由 $f^{'}(x)<0\Rightarrow g(x)<0\Rightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1+2a}}{2}\right)$ $\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1+2a}}{2}\right)$ 单调递减，在

$\left(\dfrac{1-\sqrt{1+2a}}{2},1\right)$单调递增.　　……………………………………………………5 分

（2）证明：由（1）知当$-\dfrac{1}{2}<a<0$时，函数 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2，且 x_1,x_2 是方程

$-2x^2+2x+a=0$的两根，$\therefore x_1+x_2=1, x_1\cdot x_2=-\dfrac{a}{2}, 0<x_1<\dfrac{1}{2}<x_2<1.$　　…………7 分

要证$2f(x_1)-ax_2>\left(2\ln 2-\dfrac{3}{2}\right)a$，只要证$\dfrac{2f(x_1)}{a}-x_2<2\ln 2-\dfrac{3}{2}$

而$\dfrac{2f(x_1)}{a}-x_2=\dfrac{2x_1^2-2a\ln(1-x_1)}{a}-x_2=\dfrac{2x_1^2}{a}-2\ln(1-x_1)-x_2=\dfrac{2x_1^2}{-2x_1x_2}-2\ln x_2-x_2$

$=-\dfrac{x_1}{x_2}-2\ln x_2-x_2=-\dfrac{1-x_2}{x_2}-2\ln x_2-x_2=-\dfrac{1}{x_2}+1-2\ln x_2-x_2$　　……………9 分

令$\varphi(x)=-2\ln x-x-\dfrac{1}{x}+1, x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则$\varphi^{'}(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{-x^2-2x+1}{x^2}$,

Q $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,$\therefore \varphi^{'}(x)<0$，$\therefore \varphi(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$单调减，$\therefore \varphi(x)<\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$

故原不等式得证.　　…………………………………………………………12 分

22. (本小题满分 12 分)

解:（1）由$|AB|=4\sqrt{3}$，　知$|y_A|=|y_B|=2\sqrt{3}$，代入圆E: $(x-1)^2+y^2=16$得$x_A=x_B=3$.

……………………………………………………………………………2 分

再由抛物线C: $y^2=2px\,(p>0)$，得$12=6p$，

所以 $p=2$，故抛物线C: $y^2=4x$.　　…………………………………………4 分

（2）令$P(x_0,y_0)$，$\mathrm{M}(x_1,y_1)$, $\mathrm{N}(x_2,y_2)$

抛物线在点　处的切线方程为 $x-x_1=m(y-y_1)$，

与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my+4my_1-4x_1=0$……①　　　　…………………………5 分

由相切 $\Delta=16m^2-4(4my_1-4x_1)=0$ 得 $4my_1-4x_1=4m^2$，

代入①得 $y_1=2m$…………6 分

故在点　处的切线方程为 $x-x_1=\frac{y_1}{2}(y-y_1)$，即为 $yy_1=2x+2x_1$　　　……7 分

同理：点　处的切线方程为 $yy_2=2x+2x_2$，　　　…………………………………8 分

而两切线交于点 $P(x_0,y_0)$

所以有 $y_0y_1=2x_0+2x_1$，$y_0y_2=2x_0+2x_2$

则直线 MN 的方程为：$2x-y_0y+2x_0=0$

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ 2x-y_0y+2x_0=0 \end{cases}$ 得 $y^2-2y_0y+4x_0=0$，所以 $y_1+y_2=2y_0$，$y_1y_2=4x_0$　…10 分

于是

$$|MF|\bullet|NF|=(x_1+1)(x_2+1)=\frac{y_1^2y_2^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}+1=x_0^2+\frac{1}{4}[(2y_0)^2-2\times4x_0]+1$$

$$=(x_0-1)^2+y_0^2$$

又点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $E:(x-1)^2+y^2=16$ 上，所以 $(x_0-1)^2+y_0^2=16$，

即 $|MF|\bullet|NF|=16$.　　…………………………………………………………12 分