高三数学考试参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.
因为 $A=(-3,2)$,$B=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,所以 $A\cap B=(-3,0)\cup(1,2)$.

2. C 【解析】本题以茎叶图的形式考查统计知识,考查数据处理能力.
A 组数据的中位数是 4.65,B 组数据的中位数是 4.8,A 错误.
A 组数据的极差是 1.2,B 组数据的极差是 1,B 错误.
因为 $4+6+6+6+7+8+10+11+12=2+4+4+5+8+8+8+9+10+12$,所以两组数据的平均数相等,C 正确.
A 组数据的众数是 4.6,B 组数据的众数是 4.8,D 错误.

3. A 【解析】本题考查空间中的垂直关系,考查空间想象能力与逻辑推理的核心素养.
当四面体 $ABCD$ 为正四面体时,AB 与 CD 垂直,A 正确,C 错误.若 A 在平面 BCD 内的射影是 B,则 AB 与平面 BCD 垂直,B 错误.平面 ABC 与平面 BCD 可能垂直,D 错误.

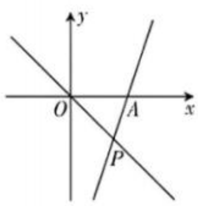
4. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.
设 $g(x)=f(2^x-2^{-x})$,则 $g(-x)=f(2^{-x}-2^x)=-f(2^x-2^{-x})=-g(x)$,则 $y=f(2^x-2^{-x})$是奇函数.

5. A 【解析】本题考查抛物线的定义,考查直观想象的核心素养.
由题意可知,$A(0,2)$,$B(0,-2)$,则 $l:y=-2$,动点 P 的轨迹为抛物线,且其焦点为$(0,2)$,准线为 $y=-2$,故点 P 的轨迹方程为 $x^2=8y$.

6. B 【解析】本题考查随机变量的数学期望,考查数学建模与数学运算的核心素养.
$E(X)=0.3t+0.2(2-t)+0.2t^2+6\times0.3=0.2(t+0.25)^2+2.2-0.2\times0.25^2$,
当 $t=-0.25$ 时,X 的数学期望取得最小值.

7. B 【解析】本题考查等比数列,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.
依题意可得该等比数列前 10 项的倒数构成一个新的等比数列,且其首项为 4,公比为$\frac{1}{2}$,故$\frac{S}{S'}=$
$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1-2^{10}}{1-2}}{4\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}\times(2^{10}-1)}{8\times\frac{2^{10}-1}{2^{10}}}=32.$$

8. A 【解析】本题考查导数的几何意义与三角恒等变换,考查数学运算与直观想象的核心素养.



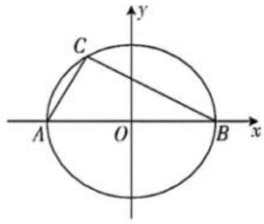
由 $f'(x)=4x^3-1$,可得 $f'(0)=-1$,$f'(1)=3$,则曲线 $y=f(x)$在点 O 处的切线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$,设曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线的倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=3$.由图可知,
$\tan\angle OPA=\tan(\frac{3\pi}{4}-\alpha)=\frac{-1-\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{-1-3}{1-3}=2$.

9. C 【解析】本题考查解三角形与充分必要条件的判定,考查逻辑推理的核心素养.
由正弦定理,题中的不等式等价于$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)>0$.假设$\triangle ABC$为钝角三角形,则由余弦定理得 $a^2+b^2-c^2$,$b^2+c^2-a^2$,$c^2+a^2-b^2$ 这三个代数式中有两个为正,一个为负,可得$(a^2+b^2-c^2)\cdot(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)<0$,所以$\triangle ABC$为锐角三角形.若$\triangle ABC$为锐角三角形,则 $a^2+b^2-c^2$,$b^2+c^2-a^2$,$c^2+a^2-b^2$ 这三个代数式均为正,所以$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)>0$.故"$(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)(\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B)>0$"是"$\triangle ABC$ 为锐角三角形"的充要条件.

10. D 【解析】本题考查椭圆的性质,考查直观想象与数学运算的核心素养.
设椭圆 D 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,如图,点 C 的横坐标为$-(\frac{7}{2}-3\cos60°)=-2$,纵坐标为 $3\sin60°$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，因为 $AB=7$，所以 $a=\frac{7}{2}$，

将点 C 的坐标代入 $\frac{x^2}{(\frac{7}{2})^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{16}{49}+\frac{27}{4b^2}=1$，解得 $b^2=\frac{9\times 49}{44}$，



故 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{11}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

11. A 【解析】本题考查导数的应用与不等式的综合，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

由 $f(x)>xf'(x)-x^2g'(x)$，得 $g'(x)>\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

设函数 $h(x)=g(x)-\frac{f(x)}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=g'(x)-\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $h(2)>h(1)$，

即 $g(2)-\frac{f(2)}{2}>g(1)-\frac{f(1)}{1}$，即 $2g(2)+2f(1)>f(2)+2g(1)$.

12. C 【解析】本题考查数列的综合，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

当 $3\leqslant n\leqslant m$ 时，$a_na_{n-1}=a_{n-1}a_{n-2}-(n-p)$，

当项数 m 最大时，$a_m=0$，则 $m-p=a_{m-1}a_{m-2}$，

$a_{m-1}a_{m-2}=a_{m-2}a_{m-3}-(m-1-p)$，$a_{m-2}a_{m-3}=a_{m-3}a_{m-4}-(m-2-p)$，…，$a_3a_2=a_2a_1-(3-p)$，

将以上各式相加得 $m-p=a_1a_2-[(m-1-p)+(m-2-p)+\cdots+(3-p)]$，

即 $m-p=a_1a_2-\frac{(m-1-p+3-p)(m-3)}{2}=a_1a_2-\frac{(m+2-2p)(m-3)}{2}$.

因为 m 的最大值为 220，所以 $220-p=111\times 217-217(111-p)$，

解得 $p=\frac{110}{109}$.

13. $3+2\mathrm{i}$（本题答案不唯一，只要 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 满足 $a^2-b^2=5$，$b\neq 0$ 即可，例如 $3-2\mathrm{i}$） 【解析】本题考查复数的实部、虚部与复数的运算，考查数学运算的核心素养.

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，依题意可得 $a^2-b^2=5$，$b\neq 0$.

14. $-\frac{5}{13}$ 【解析】本题考查平面向量的数量积，考查数学运算的核心素养.

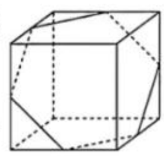
依题意可得 $(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\frac{13}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{7}{2}\boldsymbol{b}^2=0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{5}{13}$.

15. $\frac{41}{120}$ 【解析】本题考查古典概型与排列组合的应用，考查应用意识与逻辑推理的核心素养.

要使得 $(2,3)$ 的状态发生改变，则需要按 $(1,3)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,3)$ 这五个开关中的一个，要使得 $(4,1)$ 的状态发生改变，则需要按 $(3,1)$，$(4,1)$，$(4,2)$ 这三个开关中的一个，所以要使得 $(2,3)$ 和 $(4,1)$ 的最终状态都未发生改变，则需按其他八个开关中的两个或 $(1,3)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,3)$ 中的两个或 $(3,1)$，$(4,1)$，$(4,2)$ 中的两个，故所求概率为 $\frac{A_8^2+A_5^2+A_3^2}{A_{16}^2}=\frac{41}{120}$.

16. 108；$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ 【解析】本题考查翻折问题、多面体的体积、球体，考查空间想象能力、直观想象与数学运算的核心素养.

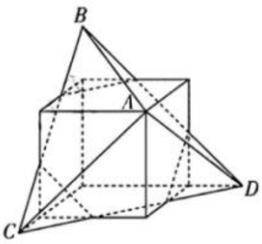
将平面图形折叠并补形得到如图(3)所示的正方体，该七面体为正方体沿着图中的六边形截面截去一部分后剩下的另一部分，易得其体积为正方体体积的一半，即 $\frac{1}{2}\times 6^3=108\ \mathrm{cm}^3$.

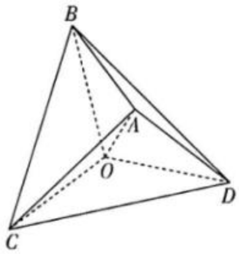

图(3)

当小球为该七面体的内切球时，半径最大，此球亦为正三棱锥 $A-BCD$ 的内切球. $BD=9\sqrt{2}$ cm，$AD=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+3^2}=9$ cm，设 O 为 $\triangle BCD$ 的中心，则 $DO=3\sqrt{6}$ cm，高 $AO=$

$\sqrt{AD^2-DO^2}=3\sqrt{3}$ cm,设△BCD内切圆的半径为 r cm,则 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}r(S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD})$,(*)

在△ACD中,$AD=AC=9$ cm,$CD=9\sqrt{2}$ cm,得 $S_{\triangle ACD}=\frac{81}{2}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times9\sqrt{2}\times9\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm^2,代入(*),得 $r=\frac{9}{3+\sqrt{3}}=\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$.





17. 解:(1)取 C_1C 的中点 H, ······ 1分

连接 A_1B,A_1G,BH,GH,所以截面 BA_1GH 为要求作的截面. ······ 2分

理由如下:

因为 E,F 分别为 A_1B_1,BB_1 的中点,所以 $A_1B /\!/ EF$,又 $A_1B\not\subset$平面 C_1EF,$EF\subset$平面 C_1EF,所以 $A_1B/\!/$平面 C_1EF. ······ 3分

在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中,因为 G 为 C_1D_1 的中点,所以 $A_1E/\!/GC_1$,且 $A_1E=GC_1$,

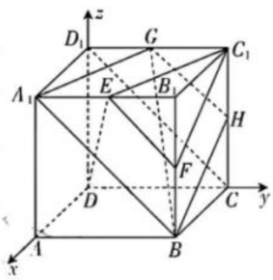
所以四边形 A_1EC_1G 为平行四边形,所以 $A_1G/\!/EC_1$,同上可得 $A_1G/\!/$平面 C_1EF. ······ 4分

又 $A_1B\cap A_1G=A_1$,所以平面 $BA_1G/\!/$平面 C_1EF. ······ 5分

连接 D_1C,易证 $GH/\!/D_1C$,$A_1B/\!/D_1C$,则 $GH/\!/A_1B$,

所以 A_1,B,H,G 四点共面,从而截面 BA_1GH 为要求作的截面. ······ 6分

(2)如图,以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$C_1(0,2,2)$,$E(2,1,2)$,$F(2,2,1)$, ······ 7分



$\overrightarrow{EC_1}=(-2,1,0)$,$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{DE}=(2,1,2)$. ······ 8分

设平面 C_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{EC_1}\cdot\boldsymbol{m}=-2x+y=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=y-z=0,\end{cases}$ ······ 9分

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,2,2)$, ······ 10分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DE},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{DE}||\boldsymbol{m}|}=\frac{8}{9}$. ······ 11分

故直线 DE 与平面 C_1EF 所成角的正弦值为 $\frac{8}{9}$. ······ 12分

评分细则:

【1】第(1)问中,若得到的截面为△A_1BG,且证明了截面 $A_1BG/\!/$平面 C_1EF,第(1)问只得3分.

【2】第(2)问中,平面 C_1EF 的法向量不唯一,只要与 $\boldsymbol{m}=(1,2,2)$ 共线即可.

18. 解:(1)依题意可得$\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$, ······ 2分

解得 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}+2k(k\in\mathbf{Z})$. ······ 3分

当 $k=0$ 时,$1\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$; ······ 4分

当 $k\geqslant1$ 时,不等式 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}+2k$ 无解. ······ 5分

故 ω 的最大值为 $\frac{7}{6}$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2},0)$ 中心对称,所以 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ……………………… 8 分

因为 $1\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$,所以 $\omega=\frac{10}{9}$, ……………………………………………………………… 9 分

则 $f(x)=4\sin(\frac{10}{9}x+\frac{\pi}{3})$,当 $x\in[-\frac{9\pi}{20},m]$ 时,$\frac{10}{9}x+\frac{\pi}{3}\subset[-\frac{\pi}{6},\frac{10}{9}m+\frac{\pi}{3}]$, ……………………… 10 分

则 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{10}{9}m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,……………………………………………………………………… 11 分

解得 $\frac{3\pi}{20}\leqslant m\leqslant\frac{3\pi}{4}$,所以 m 的取值范围是 $[\frac{3\pi}{20},\frac{3\pi}{4}]$. ………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,得到 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}+2k(k\in\mathbf{Z})$ 后,还可以由 $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\pi-\frac{\pi}{6}$,得 $0<\omega\leqslant\frac{6}{5}$,所以 $1\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$,故 ω 的最大值为 $\frac{7}{6}$.

【2】第(2)问中,若得到 $\frac{3\pi}{20}\leqslant m\leqslant\frac{3\pi}{4}$,但最后没有写成区间形式,不扣分.

19. 解:(1) $\bar{x}=\frac{3+3+4+5+5+6+6+8}{8}=5$,$\bar{y}=\frac{10+12+13+18+19+21+24+27}{8}=18$. ……………… 1 分

$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=16+12+5+0+0+3+6+27=69$, ……………………………………… 2 分

$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=4+4+1+0+0+1+1+9=20$,$\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2=64+36+25+0+1+9+36+81=252$, … 3 分

代入公式可得相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{69}{\sqrt{20}\times\sqrt{252}}=\frac{23}{4\sqrt{35}}\approx0.97$. ……………… 4 分

由于 $|r|>0.75$ 且 r 非常接近 1,所以 y 与 x 具有很强的线性相关关系. ………………………………… 5 分

经计算可得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{69}{20}=3.45$,……………………………………………………………… 6 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=18-3.45\times5=0.75$. 所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=3.45x+0.75$. ……………………… 7 分

(2)(i)当 $x=10$ 时,$\hat{y}=35.25$,所以预计能带动的消费达 35.25 百万元. ……………………………………… 9 分

(ii)因为 $\frac{|30-35.25|}{35.25}>10\%$,所以发放的该轮消费券助力消费复苏不是理想的. ……………………… 11 分

发放消费券只是影响消费的其中一个因素,还有其他重要因素,比如:A 城市经济发展水平不高,居民的收入水平直接影响了居民的消费水平,A 城市人口数量有限、商品价格水平、消费者偏好、消费者年龄构成等因素一定程度上影响了消费总量(只要写出一个原因即可). …………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,x,y 的平均数只求对了一个,不给分.

【2】第(2)问的第(ii)问涉及的其他因素很多,比较主观,学生只要答出一个比较合理的原因即可.

20. (1)解:$f'(x)=12x^3-\frac{12}{x^4}=\frac{12(x^7-1)}{x^4}$. ……………………………………………………………… 1 分

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减; …………………………………………………………… 2 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增. ………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=7$. ………………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明:(i)由(1)可知 $0<x_1<1<x_2$, ……………………………………………………………… 5 分

$x_1^4+(2-x_1)^4-x_1^3-(2-x_1)^3=x_1^3(x_1-1)+(2-x_1)^3(1-x_1)=(x_1-1)[x_1^3-(2-x_1)^3]$, ………… 6 分

因为 $0<x_1<1$,所以 $x_1-1<0$,$0<x_1<2-x_1$,则 $(x_1-1)[x_1^3-(2-x_1)^3]>0$,所以 $x_1^3+(2-x_1)^3<x_1^4+(2-x_1)^4$. ………… 7 分

(ii)由 $0<x_1<1<x_2$ 得 $1<2-x_1<2$,要证 $x_1+x_2>2$,只需证 $x_2>2-x_1$,只需证 $f(x_2)>f(2-x_1)$,即证 $f(x_1)>f(2-x_1)$. ………… 8 分

令函数 $g(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$,

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=12x^3-\frac{12}{x^4}+12(2-x)^3-\frac{12}{(2-x)^4}$, ………… 9 分

所以 $g'(x)=12[x^3+(2-x)^3-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{(2-x)^4}]<12[x^4+(2-x)^4-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{(2-x)^4}]=12[x^4+(2-x)^4-\frac{x^4+(2-x)^4}{(2x-x^2)^4}]=12[x^4+(2-x)^4]\cdot\frac{(2x-x^2)^4-1}{(2x-x^2)^4}$, ………… 10 分

因为 $2x-x^2=x(2-x)<\frac{(x+2-x)^2}{4}=1$,所以 $g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减. ………… 11 分

所以 $g(x)>g(1)=0$,则 $f(x)>f(2-x)(0<x<1)$,故 $x_1+x_2>2$. ………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,考生得到"当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$",但没有写单调递减,不扣分;考生得到"当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$",但没有写单调递增,同样不扣分.

【2】第(2)问的第(ii)问未写"由 $0<x_1<1<x_2$ 得 $1<2-x_1<2$",直接得到"$f(x_2)>f(2-x_1)$",扣 1 分.

21.(1)解:设 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,不妨设右焦点为$(c,0)$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$. …… 1 分

右焦点到渐近线的距离 $d=\frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}}=b=\sqrt{2}$. ………… 2 分

因为 C 为等轴双曲线,所以 $a=b=\sqrt{2}$. ………… 3 分

所以 C 的方程为 $x^2-y^2=2$. ………… 4 分

(2)证明:设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$. 由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cdot\cos 45°$,得 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}|OP|\cdot|OQ|$,

………… 5 分

且 $|OP|^2=x_1^2+y_1^2=2x_1^2-2=2y_1^2+2$,$|OQ|^2=x_2^2+y_2^2=2x_2^2-2=2y_2^2+2$, ………… 6 分

所以 $y_1^2y_2^2=\frac{1}{2}|OP|^2\cdot|OQ|^2+x_1^2x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$, ………… 7 分

则$\frac{|OP|^2-2}{2}\cdot\frac{|OQ|^2-2}{2}=\frac{1}{2}|OP|^2\cdot|OQ|^2+\frac{|OP|^2+2}{2}\cdot\frac{|OQ|^2+2}{2}-\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$,

即 $|OP|^2\cdot|OQ|^2+2|OP|^2+2|OQ|^2=2\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$, ………… 9 分

平方后得$(|OP|^2\cdot|OQ|^2+2|OP|^2+2|OQ|^2)^2=8\times\frac{|OP|^2+2}{2}\cdot\frac{|OQ|^2+2}{2}\cdot|OP|^2\cdot|OQ|^2$, …… 10 分

等式两边同时除以$|OP|^4\cdot|OQ|^4$,得$(1+\frac{2}{|OP|^2}+\frac{2}{|OQ|^2})^2=2(1+\frac{2}{|OP|^2})(1+\frac{2}{|OQ|^2})$, ………… 11 分

即$\frac{4}{|OP|^4}+\frac{4}{|OQ|^4}=1$,即$\frac{1}{|OP|^4}+\frac{1}{|OQ|^4}=\frac{1}{4}$.

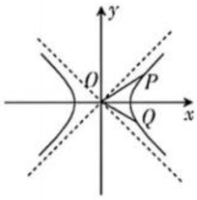
所以$\frac{1}{|OP|^4}+\frac{1}{|OQ|^4}$是定值,且该定值为$\frac{1}{4}$. ………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,C 的方程写为"$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$",不扣分.

【2】第(2)问还可以这样解答:

由$\angle POQ=\frac{\pi}{4}$，得P,Q必在C的同一支上且位居x轴的两侧，不妨设P,Q在C的右支上，如图所示. ………………………………………… 5分



令$k_{OP}=k(0<k<1)$，则$k_{OQ}=\frac{k-1}{k+1}$. ………………………… 7分

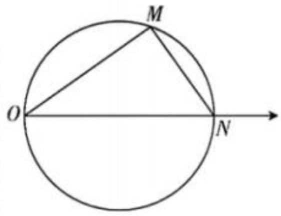
由$\begin{cases}y=kx,\\x^2-y^2=2,\end{cases}$得$x^2=\frac{2}{1-k^2}$， ………………………… 8分

则$|OP|^2=(1+k^2)x^2=\frac{2(1+k^2)}{1-k^2}$， ………………………… 9分

以$\frac{k-1}{k+1}$代k得$|OQ|^2=\frac{2[1+(\frac{k-1}{k+1})^2]}{1-(\frac{k-1}{k+1})^2}=\frac{1+k^2}{k}$， ………………………… 10分

故$\frac{1}{|OP|^4}+\frac{1}{|OQ|^4}=\frac{(1-k^2)^2}{4(1+k^2)^2}+\frac{4k^2}{4(1+k^2)^2}=\frac{1}{4}$(为定值). ………………………… 12分

22. 解：(1)如图，设$M(\rho,\theta)$为圆C上一点，O为极点，ON为圆C的直径，



连接OM,MN，则$OM\perp MN$， ………………………… 1分

则$\rho=|OM|=|ON|\cos\angle MON=4\cos\theta$. ………………………… 3分

故圆C的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$. ………………………… 4分

(2)以极点O为坐标原点，极轴为x轴，建立直角坐标系(图略)，则极坐标中的直线$\rho\sin\theta=-3$，$\rho\cos\theta=-1$对应的直角坐标方程为$y=-3$，$x=-1$. … 5分

因为圆C的直角坐标方程为$(x-2)^2+y^2=4$，设$P(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$， ………………………… 6分

所以$|PA|=2\sin\alpha-(-3)=3+2\sin\alpha$，$|PB|=2+2\cos\alpha-(-1)=3+2\cos\alpha$， ………………………… 7分

则$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|=2\sin\alpha\cos\alpha+3(\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{9}{2}$， ………………………… 8分

设$\sin\alpha+\cos\alpha=t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则$S=t^2+3t+\frac{7}{2}$， ………………………… 9分

当$t=\sqrt{2}$时，S取得最大值$\frac{11}{2}+3\sqrt{2}$. ………………………… 10分

评分细则：

【1】第(1)问还可以先写圆C的直角坐标方程，再得到极坐标方程.

【2】第(2)问未写"以极点O为坐标原点，极轴为x轴，建立直角坐标系"，不扣分.

23. (1)证明：当$a=1,b=2$时，$f(x)=|x-1|+|x-2|\geqslant|x-1-(x-2)|=1$， ………………………… 2分

因为$\sin x\leqslant 1$， ………………………… 3分

所以$f(x)\geqslant\sin x$. ………………………… 4分

(2)解：$f(x)=\begin{cases}-2x+a+b,x<a,\\b-a,a\leqslant x\leqslant b,\\2x-a-b,x>b,\end{cases}$ ………………………… 6分

解不等式$f(x)<a+b+2$，得$-1<x<a$或$a\leqslant x\leqslant b$或$b<x<a+b+1$，

所以$A=\{x|f(x)<a+b+2\}=\{x|-1<x<a+b+1\}$. ………………………… 8分

由$|2x-a-b|<a+b+2$，得$-(a+b+2)<2x-a-b<a+b+2$，

即$-1<x<a+b+1$， ………………………… 9分

故$A=B$. ………………………… 10分

评分细则：

【1】第(1)问还可以这样写：因为$f(x)=|x-1|+|x-2|\geqslant|x-1-(x-2)|=1\geqslant\sin x$，所以$f(x)\geqslant\sin x$.

【2】第(2)问求集合A还可以分三段讨论解不等式，每段正确各得1分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。