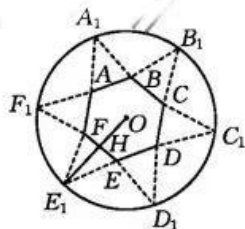
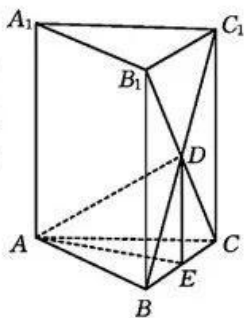


高三数学参考答案

1. C 因为 $P = \{0, 1, 2\}$, $Q = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 所以 $P \cap Q = \{0, 1, 2\}$.
2. A 因为 $z = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1+i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限.
3. D 将 14 个数据从小到大排序: 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 17. 因为 $14 \times 80\% = 11.2$, 所以第 80 百分位数是第 12 个数据, 即 14.
4. B 因为 $\sin C = 2\sqrt{2} \sin B$, 所以 $c = 2\sqrt{2}b$. 因为 $a^2 - b^2 = 3\sqrt{2}bc$, 所以 $a = \sqrt{13}b$, 所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 8b^2 - 13b^2}{2b \cdot 2\sqrt{2}b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $A = \frac{3\pi}{4}$.
5. D 取 BC 的中点 E , 连接 DE , AE . 因为 D 是 BC_1 的中点, 所以 $DE \parallel CC_1$. 因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $DE \perp$ 平面 ABC . 因为 AE 是斜线 AD 在底面上的射影, 所以 $\angle DAE$ 即直线 AD 与底面 ABC 所成的角. 在正三角形 ABC 中, $AE = 3\sqrt{3}$, 所以直线 AD 与底面 ABC 所成角的正切值为 $\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.
6. D 因为 e_1, e_2 是互相垂直的单位向量, 所以 $(e_1 + \sqrt{3}e_2) \cdot (\lambda e_1 - \sqrt{3}e_2) = \lambda e_1^2 + \sqrt{3}\lambda e_1 \cdot e_2 - \sqrt{3}e_1 \cdot e_2 - 3e_2^2 = \lambda - 3$. $|e_1 + \sqrt{3}e_2| = \sqrt{(e_1 + \sqrt{3}e_2)^2} = \sqrt{e_1^2 + 2\sqrt{3}e_1 \cdot e_2 + 3e_2^2} = 2$, $|\lambda e_1 - \sqrt{3}e_2| = \sqrt{(\lambda e_1 - \sqrt{3}e_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 e_1^2 - 2\sqrt{3}\lambda e_1 \cdot e_2 + 3e_2^2} = \sqrt{\lambda^2 + 3}$. 因为 $e_1 + \sqrt{3}e_2$ 与 $\lambda e_1 - \sqrt{3}e_2$ 的夹角为 120° , 所以 $\frac{\lambda - 3}{2 \times \sqrt{\lambda^2 + 3}} = \cos 120^\circ$, 解得 $\lambda = 1$.
7. C 连接 OE_1 , 交 EF 于点 H , 则 $OE_1 \perp EF$. 设 $EF = 2x$ cm, 则 $OH = \sqrt{3}x$ cm, $E_1H = (6\sqrt{3} - \sqrt{3}x)$ cm. 因为 $\begin{cases} 0 < 2x, \\ 6\sqrt{3} - \sqrt{3}x > \sqrt{3}x, \end{cases}$ 所以 $x \in (0, 3)$. 六棱锥的高 $h = \sqrt{E_1H^2 - OH^2} = \sqrt{(6\sqrt{3} - \sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{3}x)^2} = 6\sqrt{3-x}$ cm. 正六边形 $ABCDEF$ 的面积 $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2x)^2 = 6\sqrt{3}x^2$ cm², 则六棱锥的体积 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3}x^2 \times 6\sqrt{3-x} = 12\sqrt{3}\sqrt{3x^4 - x^5}$ cm³. 令函数 $f(x) = 3x^4 - x^5, x \in (0, 3)$, 则 $f'(x) = 12x^3 - 5x^4 = x^3(12 - 5x)$, 当 $x \in (0, \frac{12}{5})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{12}{5}, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{12}{5})$ 上单调递增, 在 $(\frac{12}{5}, 3)$ 上单调递减, 所以当 $x = \frac{12}{5}$ 时, 正六棱锥的体积最大, 此时正六边形 $ABCDEF$ 的底面边长为 $2x = \frac{24}{5}$ cm.
8. B 因为 $f(f(n)) = 3n$, 所以 $f(f(1)) = 3$. 因为 $x \in \mathbf{N}, f(x) \in \mathbf{N}$, 且 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(1) = 2$, 所以 $f(f(1)) = f(2) = 3$. 因为 $f(f(2)) = f(3) = 6$,





所以 $f(f(3))=f(6)=9$, 于是 $f(4)=7, f(5)=8$.

因为 $f(f(4))=f(7)=12$, 所以 $f(f(7))=f(12)=21$,

因为 $f(f(6))=f(9)=18$, 所以 $f(10)=19, f(11)=20$.

因为 $f(f(9))=f(18)=27, f(f(10))=f(19)=30$,

所以 $f(f(18))=f(27)=54, f(f(19))=f(30)=57$, 所以 $f(28)=55, f(29)=56$.

9. BC 由 $\begin{cases} x-3=0, \\ y+2=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-2, \end{cases}$ 即 l 恒过点 $(3, -2)$, 故 A 错误.

由 $\frac{|1+m+2m-3|}{\sqrt{1+m^2}}=2$, 得 $m=0$ 或 $m=\frac{12}{5}$, 故 B 正确.

若 $m=-1$, 则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 因为 $|PQ|=\sqrt{|PC|^2-4}\geq\sqrt{d^2-4}$, 所

以 $|PQ|_{\min}=\frac{\sqrt{34}}{2}$, 故 C 正确. 若圆 C 上只有一个点到直线 l 的距离为 1, 则圆心 C 到直线 l

的距离 $d=3$. 由 $\frac{|1+m+2m-3|}{\sqrt{1+m^2}}=3$, 得 $m=-\frac{5}{12}$, 故 D 错误.

10. BCD 因为事件 A, B 不可能同时发生, 所以 A, B 为互斥事件, 但不对立, 故 A 不正确; 事件 C 为“三个球都是红球”, 与事件 A 相同, 所以 B 正确; 事件 D 包含三个球都是黄球、一个红球两个黄球、两个红球一个黄球, 与事件 A 对立, 所以满足 $P(A)+P(D)=1$, 故 C 正确; 因为 $B\subseteq D$, 所以事件 B 与事件 D 可能同时发生, 故 D 正确.

11. ABD 因为 $f(2x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-2x+1)=f(2x+1)$,

所以 $f(-x+1)=f(x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象的对称轴为 $x=1$. 因为 $f(2x+1)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2}, 1)$ 成中心对称, 所以 $f(2(\frac{3}{2}-x)+1)+f(2(\frac{3}{2}+x)+1)=2$. 所以 $f(2-2x)+f(2+2x)=2$, 所以 $f(2-x)+f(2+x)=2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(2, 1)$ 对称. 因为 $f(-x+1)=f(x+1)$, 所以 $f(-x+2)=f(x)$, $f(x+2)=f(-x)$, 所以 $f(2-x)+f(2+x)=f(x)+f(-x)=2$, 因为 $f(2-x)+f(2+x)=2$, 所以 $f(-x)+f(4+x)=2$, 所以 $f(4+x)=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 4, 故 $f(2023)=f(3)$. 因为 $f(3)+f(1)=2$, 所以 $f(3)=2-f(1)=2$, 故 A 正确.

当 $x\in[1, 2]$ 时, $f(x)=\log_2 x\in[0, 1]$; 当 $x\in[2, 3]$ 时, $f(x)=2-f(4-x)\in[1, 2]$.

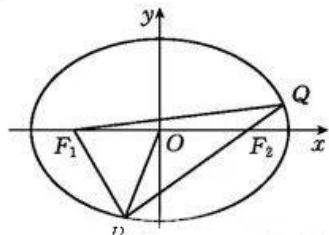
结合对称轴为 $x=1$, 可得当 $x\in[-1, 1]$ 时, $f(x)\in[0, 2]$, 结合周期性可知函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$, 故 B 正确. 根据函数的对称性大致作出函数 $f(x)$ 的图象(图略), 可知直线 $y=1$ 与函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0, 8]$ 上有 5 个交点, 故 C 错误. 因为 $f(1)+f(3)=2, f(2)+f(4)=2$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(19)=16+f(1)+f(2)+f(3)=19$, 故 D 正确.

注: 在得出 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 以及关于点 $(2, 1)$ 对称后, 由于 $x\in[1, 2]$ 时, $f(x)=\log_2 x$, 结合函数 $f(x)$ 的图象, 可以更快、更直观地解答出来.

12. AD 对于 A, 因为 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|$, 所以 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.

连接 QF_1 , 令 $|QF_2|=x$, 则 $|PF_2|=2x, |QF_1|=2a-x, |PF_1|=2a-2x$.

因为 $PF_1\perp PQ$, 所以 $|PF_1|^2+|PQ|^2=|QF_1|^2$, 即 $4(a-x)^2+9x^2=(2a-x)^2$, 得 $x=\frac{a}{3}$. 因为 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$, 所以





$4(a-x)^2+4x^2=4c^2$, 将 $x=\frac{a}{3}$ 代入, 得 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 故 A 正确.

对于 B, 设 $|PF_1|=8t$, 则 $|PQ|=15t$,

因为 $|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$, 所以 $PF_1 \perp PQ$, 所以 $|QF_1|=\sqrt{|PQ|^2+|PF_1|^2}=17t$.

因为 $|QF_1|+|QF_2|+|PF_2|+|PF_1|=4a=40t$,

所以 $t=\frac{a}{10}$, 所以 $|QF_1|=17t=\frac{17a}{10}$, $|QF_2|=2a-|QF_1|=2a-\frac{17a}{10}=\frac{3a}{10}$,

所以 $|PF_2|=|PQ|-|QF_2|=\frac{15a}{10}-\frac{3a}{10}=\frac{6a}{5}$, $|PF_1|=8t=\frac{4a}{5}$.

因为 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$, 所以 $4c^2=\frac{16a^2}{25}+\frac{36a^2}{25}$, 所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{13}{25}$, 则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{5}$, 故

B 错误. 来源: 高三答案公众号

对于 C, 因为对任意的直线 l 总有 $|PQ| \geq |F_1F_2|$, 所以只需 $|PQ|_{\min}=\frac{2b^2}{a} \geq |F_1F_2|=2c$,

所以 $b^2-a^2-c^2 \geq ac$, $e^2+e-1 \leq 0$, 得 $e \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$, 故 C 错误.

对于 D, 设 $|PF_1|=m$, $|PF_2|=n$, 则 $m+n=2a$, $mn=4c^2$,

所以 $a^2-4c^2=(\frac{m+n}{2})^2-mn=(\frac{m-n}{2})^2=(m-a)^2$.

因为 $a-c \leq m \leq a+c$, 所以 $-c \leq m-a \leq c$, 所以 $a^2-4c^2=(m-a)^2 \in [0, c^2]$, 即 $4c^2 \leq a^2 \leq 5c^2$, 则 $\frac{1}{5} \leq e^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{\sqrt{5}}{5} \leq e \leq \frac{1}{2}$, 故 D 正确.

$$13. \frac{3}{4} \quad \text{解法一: 因为 } \tan \alpha = \tan[(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}], \text{ 所以 } \tan \alpha = \frac{\frac{1}{7} - 1}{1 - (-\frac{1}{7}) \times 1} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{解法二: 由 } \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = -\frac{1}{7},$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$14. -2 \quad (x-2)^5 \text{ 展开式的通项为 } T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-2)^r = C_5^r (-2)^r x^{5-r},$$

所以 $(a-x)(x-2)^5$ 展开式中含 x^2 项的系数为 $aC_5^3(-2)^3 + (-1)C_5^4(-2)^4 = -80a - 80$.
由 $-80a - 80 = 80$, 得 $a = -2$.

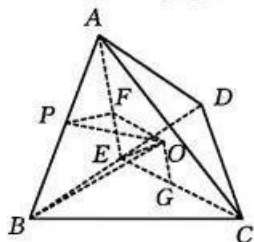
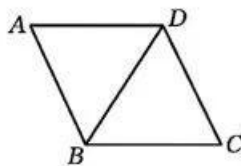
$$15. 2 \quad \text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 联立方程组 } \begin{cases} x = my + t, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 整理得 } y^2 - 4my - 4t = 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 =$$

$$4m, y_1 y_2 = -4t. \text{ 因为 } k_1 k_2 = -2, \text{ 所以 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2. \text{ 因为 } x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{16}, \text{ 所以 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{16}{y_1 y_2} =$$

$$\frac{16}{-4t} = -2, \text{ 解得 } t = 2.$$

$$16. \frac{20\pi}{3}; \pi \quad \text{如图所示, 易知 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle BCD \text{ 是等边三角形.}$$

设空间四边形 $ABCD$ 外接球的球心为 O , 所以球





心 O 在平面 ABD 和平面 BCD 上的射影分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的中心 F, G .
记 E 为 BD 的中点, 则四边形 $EFOG$ 为正方形.

因为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形, 所以 $AE = CE = \sqrt{2^2 - (\frac{1}{2} \times 2)^2} = \sqrt{3}$,

所以正方形 $EFOG$ 的边长 $OF = EF = \frac{1}{3}AE = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 连接 OE, OB , 则 $OE = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以空间四边形 $ABCD$ 外接球的半径 $R = OB = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{15}}{3}$,

所以空间四边形 $ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{20\pi}{3}$.

设过点 P 的平面为 α , 当 $OP \perp \alpha$ 时, 所得截面的面积最小, 该截面为圆形.

连接 FP . 因为 $FP^2 = AP^2 + AF^2 - 2AP \cdot AF \cos 30^\circ = \frac{1}{3}$,

所以 $OP = \sqrt{OF^2 + FP^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以截面圆 P 的半径为 $\sqrt{R^2 - OP^2} = \sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 1$, 故截面圆的面积为 π .

17. 解: (1) $f(x) = \sin x(a \cos x + \sin x) - \sin^2(\frac{3\pi}{2} - x)$

$$= \frac{a}{2} \sin 2x + \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{a}{2} \sin 2x - \cos 2x. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } |f(\frac{\pi}{3})| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + 1} = |\frac{a}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}|, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}). \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}], \text{ 所以 } 2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \theta = 2x - \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}], \text{ 所以 } \sin \theta \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{故 } f(x) \in [-\sqrt{3}, 2]. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 因为 $2S_n = 3a_n - a_1$,

$$\text{所以 } 2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n - 3a_{n-1} (n > 1), \text{ 即 } a_n = 3a_{n-1} (n > 1). \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为 $a_1, a_2 + 6, a_3$ 成等差数列, 所以 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 6)$.

$$\text{因为 } a_2 = 3a_1, a_3 = 9a_1, \text{ 所以 } a_1 + 9a_1 = 2(3a_1 + 6), \text{ 解得 } a_1 = 3, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 故 $a_n = 3^n$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3^n}.$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}[1 - (\frac{1}{3})^n]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } |T_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2000}, \text{ 得 } |\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2000}, \text{ 即 } 3^n > 1000. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $3^6 = 729 < 1000 < 2187 = 3^7$, 所以 $n \geq 7$,

故使得 $|T_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2000}$ 成立的 n 的最小值为 7. 12 分

19. 解: (1) F 为 PD 的中点. 理由如下: 连接 EF, CF 1 分

因为 E, F 分别为棱 AD, PD 的中点,

所以 $EF \parallel PA$ 2 分

因为 $AD \parallel BC, AD = 2BC = 2CD$,

所以 $BC \parallel AE, BC = AE$,

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形,

所以 $AB \parallel CE$ 4 分

因为 $AB \cap PA = A, EF \cap CE = E$,

所以平面 $CEF \parallel$ 平面 PAB 5 分

因为 $CF \subset$ 平面 CEF ,

所以 $CF \parallel$ 平面 PAB 6 分

(2) 因为 $\angle ADC = \angle PAB = \angle PAD = 90^\circ$, 所以以 D 为原点,

$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴的正方向建立如图所示的空间

直角坐标系. 7 分

设 $CD = 1$, 则 $C(1, 0, 0), B(1, 1, 0), E(0, 1, 0), P(0, 2, 2)$.

设平面 PBE 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

因为 $\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{PE} = (0, -1, -2)$, 8 分

所以 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BE} = -x_1 = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{PE} = -y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = 2$, 得 $m = (0, 2, -1)$ 9 分

设平面 PCE 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$, 因为 $\overrightarrow{CE} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{PE} = (0, -1, -2)$, 10 分

所以 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CE} = -x_2 + y_2 = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{PE} = -y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $y_2 = 2$, 得 $n = (2, 2, -1)$ 11 分

设二面角 $B-PE-C$ 为 α , 则 α 为锐角, 所以 $\cos \alpha = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

故二面角 $B-PE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意, 抽取的 100 人年龄在 40 周岁及以下的有 40 人, 表示满意的有 30 人, 年龄在 40 周岁以上的有 60 人, 表示满意的有 30 人, 所以 2×2 列联表如下:

	不满意	满意	总计
40 周岁及以下	10	30	40
40 周岁以上	30	30	60
总计	40	60	100

..... 3 分

零假设为

H_0 : 对全省实施景区门票减免活动是否满意与年龄无关联.

根据列联表中的数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{100 \times (10 \times 30 - 30 \times 30)^2}{40 \times 60 \times 60 \times 40} = \frac{25}{4} = 6.25 > 3.841 = \alpha_{0.05},$$



根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为对全省实施景区门票减免活动是否满意与年龄有关联,此推断犯错误的概率不大于 0.05. 6 分

(2)按照年龄和满意与否采用分层抽样从这 100 名游客中随机抽取的 10 名游客中,40 周岁及以下表示满意的人数与 40 周岁以上表示满意的人数均为 3,

所以随机变量 X 可能取 0,1,2,3.

$$P(X=0)=\frac{C_4^3+C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}; \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(X=1)=\frac{2C_3^2C_4^1+2C_3^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=2)=\frac{2C_3^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}; \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=3)=\frac{2C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{60}$

..... 11 分

$$\text{所以 } E(X)=\frac{9}{20} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{20} \times \frac{9}{10}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (1)解:因为焦距为 6,所以 $c=3$ 1 分

将点 $(2\sqrt{2}, 1)$ 代入 C 的方程,得 $\frac{8}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$.

因为 $a^2 + b^2 = c^2 = 9$,解得 $a^2 = 6, b^2 = 3$, 3 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2)证明:由(1)知, M 的横坐标为 2,设直线 MF_2 的方程为 $x=my+3$,则 $y_M = -\frac{1}{m}$.

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x=my+3, \\ \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (m^2-2)y^2 + 6my + 3 = 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{m^2-2}, y_1 y_2 = \frac{3}{m^2-2}, m \neq \pm\sqrt{2}$ 6 分

因为 $l \parallel OA$,所以直线 l 的方程为 $y + \frac{1}{m} = \frac{y_1}{my_1+3}(x-2)$.

直线 OB 的方程为 $y = \frac{y_2}{my_2+3}x$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y + \frac{1}{m} = \frac{y_1}{my_1+3}(x-2), \\ y = \frac{y_2}{my_2+3}x, \end{cases} \text{ 得 } y = \frac{y_1 y_2 + \frac{1}{m} y_2}{y_1 - y_2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{m^2-2}, y_1 y_2 = \frac{3}{m^2-2}$ 两式相除,



得 $\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{1}{2m}$, 则 $y_1 y_2 = -\frac{1}{2m}(y_1 + y_2)$, 10 分

所以 $y_P = \frac{y_1 y_2 + \frac{1}{m} y_2}{y_1 - y_2} = \frac{-\frac{1}{2m}(y_1 + y_2) + \frac{1}{m} y_2}{y_1 - y_2} = \frac{-\frac{1}{2m}(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = -\frac{1}{2m}$ 11 分

因为 $y_Q = 0$, 所以 $y_P = \frac{y_M + y_Q}{2}$, 故 P 为线段 MQ 的中点. 12 分

22. 解: (1) 因为 $f(x) = ae^x - x$, 所以 $f'(x) = ae^x - 1$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; 1 分

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = ae^x - 1 = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{a}$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

因为 $g(x) = x \ln x - x^2$, 所以 $g'(x) = \ln x + 1 - 2x$ 3 分

令 $h(x) = \ln x + 1 - 2x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$ 4 分

当 $h'(x) > 0$ 时, $0 < x < \frac{1}{2}$; 当 $h'(x) < 0$ 时, $x > \frac{1}{2}$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} < 0$,

所以 $g'(x) = h(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 5 分

(2) 因为 $f(x) \leq g(x)$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 所以 $ae^x - x \leq x \ln x - x^2$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

等价于 $a \leq \frac{x \ln x - x^2 + x}{e^x}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 6 分

令 $\varphi(x) = \frac{x \ln x - x^2 + x}{e^x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{(x-1)(x-2-\ln x)}{e^x}$ 7 分

令 $u(x) = x - 2 - \ln x$, 则 $u'(x) = \frac{x-1}{x}$,

所以 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $u(x)_{\min} = u(1) = -1$ 8 分

因为 $u(e^{-2}) = e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0$, $u(e^2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$,

所以存在 $x_1 \in (e^{-2}, 1)$, $x_2 \in (1, e^2)$, 使得 $u(x) = 0$ 9 分

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 此时 $\varphi(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_1, 1)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 此时 $\varphi(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, x_2)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 此时 $\varphi(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 此时 $\varphi(x)$ 单调递增.

所以 $\varphi(x)$ 存在两个极小值 $\varphi(x_1)$ 和 $\varphi(x_2)$ 10 分

因为 x_1, x_2 分别为 $x - 2 - \ln x = 0$ 的两根, 所以 $x_1 - 2 - \ln x_1 = 0$, $x_1 - 2 = \ln x_1$,

所以 $e^{x_1-2} = x_1$,

所以 $\varphi(x_1) = \frac{x_1 \ln x_1 - x_1^2 + x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_1^2 - x_1^2 - 2x_1 + x_1}{e^{x_1}} = -\frac{x_1}{e^{x_1}} = -\frac{e^{x_1-2}}{e^{x_1}} = -e^{-2}$.

同理可得 $\varphi(x_2) = -e^{-2}$, 所以 $\varphi(x)_{\min} = -e^{-2}$ 11 分

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -e^{-2})$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线