高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数与导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|y=\log_2(x-\sqrt{2})\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}||1-x|\leqslant 2\}$，则 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=$

A. $\{0,2,3\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,3\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 若 $p:\dfrac{3}{x+1}\leqslant 1$，则 p 成立的一个充分不必要条件是

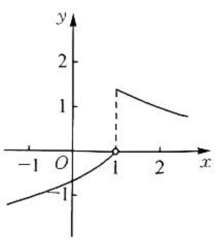
A. $-1\leqslant x\leqslant 1$　　B. $-2<x\leqslant -1$

C. $-3<x<-2$　　D. $0<x\leqslant 5$

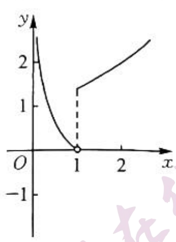
3. 已知 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，若 $(-1+\mathrm{i})\bar{z}=-2-\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

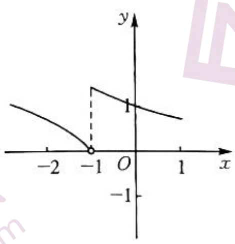
4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\sqrt{2})^x, x\leqslant 1,\\ -\ln x, x>1,\end{cases}$ 则 $y=f(2-x)$ 的大致图象是



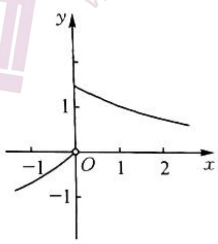
A



B



C



D

5. 在实验室细菌培养过程中，细菌生长主要经历调整期、指数期、稳定期和衰亡期四个时期. 在一定条件下，某生物实验室在研究某种动物细菌的过程中发现，细菌数量 N(单位)与该动物细菌被植入培养的时间 t(单位：小时)近似满足函数关系式 $Y(t)=N_0 e^{-\frac{t}{12}}$，其中 N_0 为初始细菌含量. 若经过 6 小时培养，该细菌数量为 $\dfrac{24\sqrt{e}}{e}$(单位)，则 $Y(12)=$

A. $12e^{-1}$　　B. $24e^{-1}$　　C. $36e^{-1}$　　D. $38e^{-2}$

6. 在公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且a_1,a_3,a_{13}成等比数列，设数列$\{2^n\cdot a_{n+1}\}$的前n项和为T_n，则$T_7=$

A. $3\times2^9+2$　　B. $11\times2^7+8$　　C. $13\times2^8+2$　　D. $13\times2^7+4$

7. 已知$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，若$\frac{2+2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=9$，则$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{5}-2$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $2-\sqrt{5}$

8. 已知$x>0,y>0$，若$(1+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{4y^2+1}-2y)=x$，则$\log_2 x\cdot\log_2 y$的最大值为

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 0

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知平面内三点$A(-1,2)$，$B(-3,6)$，$C(0,5)$，则

A. $\overrightarrow{AC}=(1,3)$

B. $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{BC}$

C. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}|=\sqrt{10}$

D. $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$

10. 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公差分别为d_1和d_2，其前n项和分别为S_n和T_n，则

A. 若$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列，则$d_1=2a_1$

B. 若$\{S_n+T_n\}$为等差数列，则$d_1+d_2=0$

C. 若$\{a_nb_n\}$为等差数列，则$d_1=d_2=0$

D. 若$b_n\in\mathbf{N}^*$，则$\{a_{b_n}\}$也为等差数列，且公差为d_1d_2

11. 已知$\triangle ABC$外接圆的面积为π，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin A,\sin B,\sin C$成等比数列，设$\triangle ABC$的周长和面积分别为P,S，则

A. $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$　　B. $0<b\leqslant\sqrt{3}$

C. $0<P\leqslant2\sqrt{3}$　　D. $0<S\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$

12. 已知函数$f(x)=\tan(\cos x)+\cos(\sin x)$，则

A. $f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的偶函数　　B. $f(x)$的最大值为 2

C. $f(x)$的最小正周期为π　　D. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若命题"$\exists x\in\mathbf{R},(a-1)x^2+2(a-1)x\geqslant4$"为假命题，则实数$a$的取值范围是________.

14. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,t)$，若对任意$t\in\mathbf{R}$，向量$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$恒成立，则$k$的值为________.

15. 一艘客船在A处测得灯塔B在它的北偏东$75°$，在A处测得灯塔C在它的北偏西$30°$，距离为$18\sqrt{2}$ n mile. 客船由A处向正北航行$12\sqrt{6}$ n mile 到达D处，再看灯塔B在它的南偏东$60°$，则$AB=$________ n mile；设灯塔C在D处的南偏西θ度，则$\theta=$________.

16. 已知函数$f(x)=e^x+ax+1(a\in\mathbf{R})$，若函数$f(x)$与函数$f(f(x))$的单调区间相同，并且既有单调递增区间，也有单调递减区间，则a的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$na_{n+1}=(n+2)S_n$.

(1)证明：数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等比数列；

(2)求 S_n 与 a_n.

18.（本小题满分 12 分）

已知$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，$AB=2$，$\angle BAC=60^\circ$，AC，BC 边的中点分别是 N，M.

(1)求$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$；

(2)若 AM 与 BN 相交于点 P，求 $\cos\angle MPN$ 的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=2b=2$，$\tan A=-\sqrt{15}$.

(1)求 c；

(2)求 $\sin(2A-B)$的值.

20.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n+1,n\text{ 为奇数},\\ a_n+n,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)求证:$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$;

(2)设$S_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}+n$，求$\left\{\dfrac{1}{S_{2n-1}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

21.(本小题满分 12 分)

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$c^2=a(a+b)$.

(1)求证:$C=2A$;

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\sin B+3\sin A$的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=(a-1)x^a-ax^{\frac{1}{a}}$.

(1)当$a=2$时，求$f(x)$的图象在$x=1$处的切线方程;

(2)当$0\leqslant x\leqslant 1$且$0<a\leqslant 1$时，求证:$e^{-\frac{1}{a}}f(e)+f(x)\geqslant -2$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B 根据题意,得 $A=\{x|y=\log_2(x-\sqrt{2})\}=\{x|x>\sqrt{2}\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}||x-1|\leqslant 2\}=\{0,1,2,3\}$,故 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{0,1\}$.故选 B.

2. C $\frac{3}{x+1}\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{2-x}{x+1}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)(x+1)\leqslant 0,\\x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x<-1$ 或 $x\geqslant 2$,又 $(-3,-2)\subsetneqq(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$,则 p 成立的一个充分不必要条件是 $-3<x<-2$.故选 C.

3. D 因为 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$.故选 D.

4. A 函数 $f(x)=\begin{cases}(\sqrt{2})^x,x\leqslant 1,\\-\ln x,x>1,\end{cases}$ 则 $y=f(2-x)=\begin{cases}(\sqrt{2})^{2-x},x\geqslant 1,\\-\ln(2-x),x<1.\end{cases}$

当 $x\geqslant 1$ 时,函数 $f(2-x)$ 单调递减;当 $x<1$ 时,函数 $f(2-x)$ 单调递增,只有 A 符合.故选 A.

5. B 由经过 6 小时培养该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$(单位),得 $Y(6)=\mathrm{e}^{-\frac{6}{12}}\cdot N_0=\frac{24\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$,解得 $N_0=24$,从而 $Y(t)=24\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}}$,所以 $Y(12)=24\times\mathrm{e}^{-\frac{12}{12}}=24\mathrm{e}^{-1}$.故选 B.

6. C 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$,由 a_1,a_3,a_{13} 成等比数列,得 $a_3^2=a_1\cdot a_{13}$,即 $(1+2d)^2=1+12d$,解得 $d=2$ 或 $d=0$(舍去),所以 $a_n=2n-1$.从而 $2^n\cdot a_{n+1}=(2n+1)\cdot 2^n$,故 $T_n=3\times 2^1+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n+1)\cdot 2^n$,$2T_n=3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)\cdot 2^{n+1}$,两式相减,得 $-T_n=3\times 2^1+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\cdot 2^n-(2n+1)\cdot 2^{n+1}=6+2\times\frac{2^2-2^{n+1}}{1-2}-(2n+1)\cdot 2^{n+1}=-(2n-1)\cdot 2^{n+1}-2$,所以 $T_n=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.所以 $T_7=13\times 2^8+2$.故选 C.

7. D $\frac{2+2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2\cos^2\alpha}=9$,由 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,得 $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0$,所以 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=3$,即 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,联立 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,解得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}=2-\sqrt{5}$.故选 D.

8. C 因为 $(1+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{4y^2+1}-2y)=x$,所以 $\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{4y^2+1}-2y}=2y+\sqrt{(2y)^2+1}$.

设 $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$,$t>0$,则 $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y)$,易知 $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,从而 $\frac{1}{x}=2y$,即 $xy=\frac{1}{2}$,所以 $\log_2 x\cdot\log_2 y\leqslant\left(\frac{\log_2 x+\log_2 y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,即 $\log_2 x\log_2 y$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.故选 C.

9. ACD 由题意,得 $\overrightarrow{AB}=(-2,4)$,$\overrightarrow{AC}=(1,3)$,$\overrightarrow{BC}=(3,-1)$,则 A 正确;因为 $1\times(-1)-3\times 3=-10\neq 0$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不平行,则 B 错误;因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=(-3,1)$,所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}|=\sqrt{10}$,则 C 正确;因为 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,且 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle\in[0,\pi]$,所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$,则 D 正确.故选 ACD.

10. ABD 对于 A,因为 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列,所以 $2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$,$S_1=a_1\geqslant 0$,即 $2\sqrt{a_1+a_2}=\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1+a_2+a_3}$,所以 $2\sqrt{2a_1+d_1}=\sqrt{a_1}+\sqrt{3a_1+3d_1}$,化简得 $(d_1-2a_1)^2=0$,所以 $d_1=2a_1$,从而 $\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$,适合

题意，则 A 正确；

对于 B，因为 $\{S_n+T_n\}$ 为等差数列，所以 $2(S_2+T_2)=S_1+T_1+S_3+T_3$，所以 $2(2a_1+d_1+2b_1+d_2)=a_1+b_1+3a_1+3d_1+3b_1+3d_2$，所以 $d_1+d_2=0$，则 B 正确；

对于 C，因为 $\{a_nb_n\}$ 为等差数列，所以 $2a_2b_2=a_1b_1+a_3b_3$，所以 $2(a_1+d_1)(b_1+d_2)=a_1b_1+(a_1+2d_1)(b_1+2d_2)$，化简得 $d_1d_2=0$，所以 $d_1=0$ 或 $d_2=0$，则 C 不正确；

对于 D，因为 $a_n=a_1+(n-1)d_1$，且 $b_n\in\mathbf{N}^*$，所以 $a_{b_n}=a_1+(b_n-1)d_1=a_1+[b_1+(n-1)d_2-1]d_1$，所以 $a_{b_n}=a_1+(b_1-1)d_1+(n-1)d_1d_2$，所以 $a_{b_{n+1}}-a_{b_n}=a_1+(b_1-1)d_1+nd_1d_2-a_1-(b_1-1)d_1-(n-1)d_1d_2=d_1d_2$，所以 $\{a_{b_n}\}$ 也为等差数列，且公差为 d_1d_2，则 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD　由 $\sin^2B=\sin A\cdot\sin C$ 及正弦定理，得 $b^2=ac$；由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-ac}{2ac}$. 因为 $a^2+c^2\geqslant 2ac$，所以 $\cos B\geqslant\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，所以 $0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，则 $0<\sin B\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；因为 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 π，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=1$；由正弦定理，得 $\dfrac{b}{\sin B}=2R=2$，所以 $b=2\sin B$，$0<b\leqslant\sqrt{3}$. 选项 AB 正确；$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}b^2\sin B=2\sin^3B$，所以 $0<2\sin^3B\leqslant2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，故 $0<S\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. 选项 D 正确；对于选项 C，取 $a=b=c=\sqrt{3}$ 满足条件，$P=a+b+c=3\sqrt{3}$，则 C 错误. 故选 ABD.

12. AD　因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$\cos x\in[-1,1]\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\tan[\cos(-x)]+\cos[\sin(-x)]=\tan(\cos x)+\cos(\sin x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，则 A 正确；

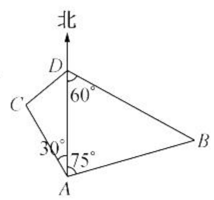
$f(0)=\tan 1+\cos 0=\tan 1+1>2$，则 B 错误；

又 $f(\pi)=-\tan 1+1$，所以 $f(\pi)\neq f(0)$，则 C 错误；

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=\cos x$ 单调递减，且 $\cos x\in[0,1]$，而 $y=\tan x$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $y=\tan(\cos x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减；当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=\sin x$ 单调递增，且 $\sin x\in[0,1]$，而 $y=\cos x$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $y=\cos(\sin x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，从而 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则 D 正确. 故选 AD.

13. $(-3,1]$　由题意，得 $\forall x\in\mathbf{R}$，$(a-1)x^2+2(a-1)x-4<0$ 为真命题. 当 $a=1$ 时，$-4<0$，满足题意；当 $a\neq1$ 时，$\begin{cases}a-1<0,\\ \Delta=4(a-1)^2-4(a-1)\times(-4)<0,\end{cases}$ 解得 $-3<a<1$. 综上，实数 a 的取值范围是 $(-3,1]$.

14. 0　由题意知，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(k-4,kt+2)$，因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$ 恒成立，所以 $-2(kt+2)-(k-4)=0$，即 $k(2t+1)=0$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $k=0$.



15. 36(2 分)　60(60 后面若加单位度(°)，同样给分)(3 分)　在 $\triangle ABD$ 中，由已知得 $\angle ADB=60^\circ$，$\angle DAB=75^\circ$，则 $\angle B=45^\circ$，$AD=12\sqrt{6}$，

由正弦定理，得 $AB=\dfrac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle B}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=36$.

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30^\circ=(12\sqrt{6})^2+(18\sqrt{2})^2-2\times12\sqrt{6}\times18\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=216$，即 $CD=6\sqrt{6}$. 因为 $AC^2+CD^2=AD^2$，所以 $\angle ACD=90^\circ$，从而 $\angle CDA=60^\circ$，所以灯塔 C 在 D 处的南偏西 60°.

16. $[-e,0)$　法一：因为 $f(x)=e^x+ax+1$，所以 $f'(x)=e^x+a$，若 $a\geqslant0$，则 $f'(x)=e^x+a>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$f(x)$只有单调增区间，不合题意；若$a<0$，令$f'(x_0)=0$，得$x_0=\ln(-a)$，$a=-e^{x_0}$，当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，当$x<x_0$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递减，设$g(x)=f(f(x))$，因为函数$f(x)$与函数$f(f(x))$的单调区间相同，所以函数$g(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，又$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$，所以$f'(f(x))\geq 0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，即$f(x)\geq x_0$恒成立，由$f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}+ax_0+1$，所以$e^{x_0}+ax_0+1\geq x_0$，将$a=-e^{x_0}$，代入上式，整理得$e^{x_0}-(e^{x_0}+1)x_0+1\geq 0$，即$(e^{x_0}+1)(1-x_0)\geq 0$，从而$x_0\leq 1$，此时$a=-e^{x_0}\geq -e$，所以$a$的取值范围为$[-e,0)$.

法二：$f'(x)=e^x+a$. 当$a\geq 0$时，$f'(x)=e^x+a>0$恒成立，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. $f(x)$没有单调递减区间，不符合题意. 当$a<0$时，$f'(x)=e^x-(-a)=e^x-e^{\ln(-a)}$. 当$x\in(-\infty,\ln(-a))$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(\ln(-a),+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. 令$g(x)=f(f(x))$，则$g'(x)=f'(f(x))f'(x)=(e^{f(x)}+a)(e^x+a)=(e^{e^x+ax+1}+a)(e^x+a)=(e^{e^x+ax+1}-e^{\ln(-a)})(e^x-e^{\ln(-a)})$. 由题意，$\forall x\in\mathbf{R}$，$e^{e^x+ax+1}-e^{\ln(-a)}\geq 0$恒成立，即$e^x+ax+1-\ln(-a)\geq 0$恒成立. 令$h(x)=e^x+ax+1-\ln(-a)$，则$h(x)\geq 0$恒成立. 因为$h'(x)=e^x+a=f'(x)$，所以$h(x)$与$f(x)$有相同的单调性，所以$h(x)_{\min}=h(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)+1-\ln(-a)=(a-1)[\ln(-a)-1]\geq 0$. 又$a-1<0$，所以$\ln(-a)-1\leq 0$，即$\ln(-a)\leq 1$，即$a\geq -e$. 综上，$a$的取值范围是$[-e,0)$.

17. (1)证明：因为$na_{n+1}=(n+2)S_n$，所以$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n$，

则$S_{n+1}-S_n=\frac{n+2}{n}S_n\Rightarrow S_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}S_n\Rightarrow\frac{S_{n+1}}{n+1}=2\times\frac{S_n}{n}$. ………………………… 3分

又$a_1=1$，所以$\frac{S_1}{1}=1$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为1，公比为2的等比数列. ………………………… 5分

(2)解：由(1)可得$\frac{S_n}{n}=2^{n-1}$，即$S_n=n\cdot 2^{n-1}$，………………………… 6分

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=(n+1)\cdot 2^{n-2}$；………………………… 8分

当$n=1$时，$a_1=1$符合$a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，………………………… 9分

所以$a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$. ………………………… 10分

18. 解：(1)由$AB=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$\angle BAC=60°$，

得$S_{\triangle ABC}=\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 2AC\sin 60°$，解得$AC=5$. ………………………… 1分

因为AC，BC边的中点分别是N，M，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. ………………………… 3分

从而$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{4}\times 5^2-\frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{4}\times 2\times 5\times\frac{1}{2}=3$. ………………………… 6分

(2)由(1)，得$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+2\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{4}\times 25+2\times\frac{1}{4}\times 2\times 5\times\frac{1}{2}=1+\frac{25}{4}+\frac{5}{2}=\frac{4+25+10}{4}=\frac{39}{4}$.

所以$|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$. ………………………… 8分

$|\overrightarrow{BN}|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4+\frac{1}{4}\times 25-2\times 5\times\frac{1}{2}=4+\frac{25}{4}-5=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$，

所以$|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$. ………………………… 10分

故 $\cos\angle MPN=\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{13}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$. ………… 12 分

19. 解:(1)因为 $\tan A=-\sqrt{15}$,$0<A<\pi$,易得 $\cos A=-\dfrac{1}{4}$. ………… 1 分

由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $4=1+c^2-2\times1\times c\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, ………… 3 分

整理,得 $2c^2+c-6=0$,

解得 $c=\dfrac{3}{2}$,或 $c=-2$(舍去).

故 $c=\dfrac{3}{2}$. ………… 5 分

(2)由 $\cos A=-\dfrac{1}{4}$,得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, ………… 6 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. ………… 7 分

因为 $\cos A=-\dfrac{1}{4}$,所以 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$,又 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2A=2\cos^2A-1=2\times\dfrac{1}{16}-1=-\dfrac{7}{8}$, ………… 9 分

而 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$,$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$,所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\dfrac{7}{8}$, ………… 10 分

故 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)\times\dfrac{7}{8}+\dfrac{7}{8}\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=0$. ………… 12 分

20. (1)证明:当 n 为奇数时,$n+1$ 为偶数,则 $a_{n+2}=a_{n+1}+n+1$,$a_{n+1}=a_n+n+1$,可得 $a_{n+2}=a_n+2(n+1)$; ………… 2 分

当 n 为偶数时,$n+1$ 为奇数,则 $a_{n+2}=a_{n+1}+n+1+1$,$a_{n+1}=a_n+n$,可得 $a_{n+2}=a_n+2(n+1)$.

综上,$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$. ………… 4 分

(2)解:法一:当 n 为奇数且 $n\geqslant2$ 时,$a_2=a_1+1+1$,$a_3=a_2+2$,$a_4=a_3+3+1$,…,$a_{n-1}=a_{n-2}+n-2+1$,$a_n=a_{n-1}+n-1$,

累加可得 $a_n=a_1+1+1+2+3+1+\cdots+n-2+1+n-1$

$=(1+1+3+1+\cdots+n-2+1)+(2+4+\cdots+n-1)$

$=\dfrac{2+n-1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{2+n-1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n^2-1}{2}$,

$n=1$ 时也符合; ………… 6 分

当 n 为偶数且 $n\geqslant2$ 时,$n-1$ 为奇数,则 $a_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2-1}{2}=\dfrac{n^2-2n}{2}$,

$a_n=a_{n-1}+(n-1)+1=\dfrac{n^2-2n}{2}+n=\dfrac{n^2}{2}$. ………… 8 分

法二:由(1),$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$,即 $a_{n+2}-a_n=2(n+1)$,

则 $a_{2n}=(a_{2n}-a_{2(n-1)})+(a_{2(n-1)}-a_{2(n-2)})+(a_{2(n-2)}-a_{2(n-3)})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2$

$=2[2(n-1)+1]+2[2(n-2)+1]+2[2(n-3)+1]+\cdots+2\times(2+1)+2$

$=2(2n-1)+2(2n-3)+2(2n-5)+\cdots+2\times3+2\times1$

$=2\times\dfrac{[1+(2n-1)]n}{2}=2n^2=\dfrac{(2n)^2}{2}$. ………… 6 分

所以当 n 为偶数时，$a_n=\frac{n^2}{2}$.

当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，由 $a_{n+1}=a_n+n+1$，得

$a_n=a_{n+1}-n-1=\frac{(n+1)^2}{2}-n-1=\frac{n^2-1}{2}$. ……………………………… 8 分

下面统一求 S_n.

因为 $2n$ 为偶数，所以 $a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{(2n)^2}{2}-\frac{(2n-1)^2-1}{2}=2n$，

所以 $S_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}+n=2+4+\cdots+2n+n=\frac{n(2+2n)}{2}+n=n(n+2)$. ……………… 10 分

$\frac{1}{S_{2n-1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

故 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{n}{2n+1}$. ……………………………… 12 分

21.（1）证明：法一：由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+ab}{2bc}=\frac{a+b}{2c}=\frac{c}{2a}$，

所以 $c=2a\cos A$. ……………………………… 1 分

由正弦定理，得 $\sin C=2\sin A\cos A$，即 $\sin C=\sin 2A$，

又 $0<C<\pi$，$0<2A<2\pi$，所以 $C=2A$ 或 $C+2A=\pi$. ……………………………… 3 分

若 $C+2A=\pi$，因为 $A+B+C=\pi$，可得 $A=B$，所以 $a=b$，

又 $c^2=a(a+b)$，所以 $c^2=a^2+b^2$，此时 $C=\frac{\pi}{2}$，$A=B=\frac{\pi}{4}$，

满足 $C=2A$，故 $C=2A$ 得证. ……………………………… 5 分

法二：由余弦定理，得 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2-ab}{2ab}=\frac{b-a}{2a}$，

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+ab}{2bc}=\frac{a+b}{2c}$，……………………………… 2 分

则 $\cos 2A=2\cos^2A-1=2\times\frac{(a+b)^2}{4c^2}-1=\frac{(a+b)^2-2c^2}{2c^2}=\frac{(a+b)^2-2a(a+b)}{2a(a+b)}=\frac{b-a}{2a}$.

所以 $\cos C=\cos 2A$. ……………………………… 4 分

由 $\cos A=\frac{a+b}{2c}>0$，得 A 为锐角，所以 $0<C,2A<\pi$，故 $C=2A$ 得证. ……………………………… 5 分

（2）解：因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，

所以 $\frac{1}{2}<\sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………… 7 分

法一：而 $\sin B+3\sin A=\sin(A+C)+3\sin A=\sin 3A+3\sin A=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A+3\sin A$

$=\sin A(1-2\sin^2A)+2\sin A\cos^2A+3\sin A$

$=\sin A(1-2\sin^2A)+2\sin A(1-\sin^2A)+3\sin A=6\sin A-4\sin^3A$. ……………………………… 9 分

令 $f(x)=6x-4x^3$，$x\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $f'(x)=6-12x^2$，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增，

又 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$，故 $f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{5}{2},2\sqrt{2}\right)$，

所以 $\sin B+3\sin A$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{2},2\sqrt{2}\right)$. ……………………………… 12分

法二：因为 $C=2A$，所以 $\sin B+3\sin A=\sin(A+C)+3\sin A=\sin 3A+3\sin A$，

设 $f(A)=\sin 3A+3\sin A$，则 $f'(A)=3\cos 3A+3\cos A$. ……………………………… 8分

当 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$3A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos 3A<0$，

此时 $f'(A)=3\cos 3A+3\cos A>0$. 所以 $f(A)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，……………………………… 10分

而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$，

所以 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时 $f(A)\in\left(\frac{5}{2},2\sqrt{2}\right)$，即 $\sin B+3\sin A$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{2},2\sqrt{2}\right)$. ……………………………… 12分

22.(1)解：当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2-2x^{\frac{1}{2}}$，则 $f'(x)=2x-x^{-\frac{1}{2}}$，……………………………… 1分

$f'(1)=2-1=1$，$f(1)=-1$，

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-(-1)=x-1$，即 $y=x-2$. ……………………………… 4分

(2)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=-1$；

当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=a(a-1)x^{a-1}-x^{\frac{1}{a}-1}=x^{\frac{1}{a}-1}\left[a(a-1)x^{a-\frac{1}{a}}-1\right]$，……………………………… 5分

$a(a-1)<0$，$a-\frac{1}{a}<0$，$y=a(a-1)x^{a-\frac{1}{a}}-1$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $a(a-1)x^{a-\frac{1}{a}}-1\leqslant a(a-1)-1=a^2-a-1<0$，

又 $x^{\frac{1}{a}-1}\geqslant 0$，所以 $f'(x)=x^{\frac{1}{a}-1}\left[a(a-1)x^{a-\frac{1}{a}}-1\right]\leqslant 0$，

从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=a-1-a=-1$. ……………………………… 6分

要证 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})+f(x)\geqslant -2$，只需证 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})-1\geqslant -2$，即 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})\geqslant -1$，

亦即 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})=(a-1)\mathrm{e}^{a-\frac{1}{a}}-a\geqslant -1$.

令 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}-x(0<x\leqslant 1)$，……………………………… 8分

$g'(x)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}+(x-1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}-1$. ……………………………… 9分

因为 $0<x\leqslant 1$，所以 $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}-1\leqslant 0$，$(x-1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以 $g'(x)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}+(x-1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}-1\leqslant 0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

所以 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，……………………………… 10分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，即 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})\geqslant -1$.

综上，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0<a\leqslant 1$ 时，$\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}f(\mathrm{e})+f(x)\geqslant -2$. ……………………………… 12分