2022—2023学年海南省高考全真模拟卷(六)

数学·答案

1. D　2. B　3. A　4. A

5. C　6. B　7. D　8. C

9. BCD　10. AC　11. CD　12. BC

13. 0　14. $\frac{7}{17}$

15. -3　16. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

17. 解:(Ⅰ)因为$(n+1)a_n=n^2+2n+k$,

所以$a_1=\frac{3+k}{2},a_2=\frac{8+k}{3},a_3=\frac{15+k}{4}$.

因为$\{a_n\}$为等差数列,所以$2a_2=a_1+a_3$,

即$\frac{2(8+k)}{3}=\frac{3+k}{2}+\frac{15+k}{4}$,

解得$k=1$,所以$a_1=2,a_2=3,a_n=2+(n-1)=n+1$. ……………………………(3分)

因为数列$\{\log_3 b_n\}$是以1为首项,1为公差的等差数列,所以$\log_3 b_n=1+n-1=n$,

所以$b_n=3^n$. ……………………………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$c_n=\frac{n+1}{3^n}$,

所以$S_n=\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{n+1}{3^n}$, ①

则$\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n+1}{3^{n+1}}$, ②

……………………………………………(8分)

①−②得$\frac{2}{3}S_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{3^2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{2\cdot3^{n+1}}$,所以$S_n=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot3^n}$. ……(10分)

18. 解:(Ⅰ)选择条件①:

则$f(x)=8\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=8\cos x\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=4\cos^2x-4\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=-2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x+2$

$=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2$,

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………(5分)

选择条件②:

则$f(x)=-4\sin^2x-4\sqrt{3}\sin x\cos x+4$

$=-2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x+2$

$=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2$,

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. ……… (5分)

选择条件③:

则 $f(x)=8\cos^2x-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2$

$=4\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+2$

$=-2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x+2$

$=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. ……… (5分)

(Ⅱ)因为 $f(x)=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2$,

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, 即 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时, $f(x)_{\min}=-4+2=-2$.

因为 $f(x)$ 在 $x=A$ 处有最小值 $-a$, 且 $0<A<\pi$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$, $a=2$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得

$4=b^2+c^2-bc\geqslant bc$,

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$,

当且仅当 $b=c=2$ 时取等号, 故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. …………………… (12分)

19. 解:(Ⅰ)由已知可得 $(0.001\,0+0.004\,5+0.011\,0+a+0.012\,0+0.004\,0+0.001\,0)\times 20=1$, 解得 $a=0.016\,5$.

$\bar{x}=340\times 0.02+360\times 0.09+380\times 0.22+400\times 0.33+420\times 0.24+440\times 0.08+460\times 0.02=400$(克), …………………… (2分)

$s^2=(-60)^2\times 0.02+(-40)^2\times 0.09+(-20)^2\times 0.22+0\times 0.33+20^2\times 0.24+40^2\times 0.08+60^2\times 0.02=600$. …… (4分)

由样本估计总体可知这批苹果重量的平均数为400克, 方差为600. ………… (5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知, 该正态分布中 μ 的估计值为400, σ^2 的估计值为600,

故 $X\sim N(400,600)$. ……………… (6分)

因为 $\sigma=\sqrt{600}\approx 25$,

所以 $P(375\leqslant x\leqslant 450)=P(400-25\leqslant x\leqslant 400+2\times 25)\approx\frac{0.682\,7+0.954\,5}{2}\approx 0.82$,

所以这批苹果中"标准品"的概率约为0.82.

……………………………………… (8分)

(Ⅲ)由题意可知, 共取出重量在[430,450)克的苹果8个, [450,470]克的苹果2个, 从中再任选3个苹果, Y 的可能取值为0,1,2,

$P(Y=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$, $P(Y=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(Y=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$,

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

……………………………………… (11分)

$E(Y)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

……………………………………… (12分)

20. 解:(Ⅰ)$\because$ A,D 是线段 E_2E_4 的三等分点,

$\therefore AE=AD=DE$，$\therefore\triangle EAD$是等边三角形.

$\because G$是AE的中点，$\therefore DG\perp AE$，

$\because AB\perp AE$，$AB/\!/CD$，$\therefore CD\perp AE$.

$\because DG\cap CD=D$，$\therefore AE\perp$平面$CDGF$.

$\because AE\subset$平面EAB，

$\therefore$平面$CDGF\perp$平面EAB. ………… (4分)

(Ⅱ)取AD中点O，BC中点T，连接EO，OT，TE，$\therefore OT\perp BC$，$OE\perp AD$，$\therefore BC\perp OE$.

又$OE\cap OT=O$，$\therefore BC\perp$平面EOT，

$\therefore ET\perp BC$，

$\therefore\angle ETO$是二面角$E-BC-A$的平面角.

设$AD=2$，则$OE=\sqrt{3}$，

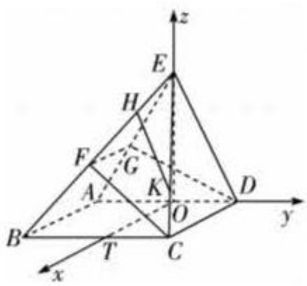
易知平面$EAD\perp$平面$ABCD$且$EO\perp AD$，

$\therefore EO\perp$平面$ABCD$，$\therefore EO\perp OT$，

$\therefore\tan\angle ETO=\dfrac{OE}{OT}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore OT=2$. …… (7分)

$\because OT$，OD，OE两两互相垂直，$\therefore$分别以OT，OD，OE所在直线为x，y，z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



则$E(0,0,\sqrt{3})$，$B(2,-1,0)$，$C(2,1,0)$.

$\because\overrightarrow{EH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}$，$\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KE}$，

$\therefore H\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$K\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{HK}=\left(\dfrac{2}{3},1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，易知平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

设HK与平面$ABCD$所成的角为θ，

则$\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{HK}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{HK}|}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

……………………………………… (12分)

21. 解：(Ⅰ)设圆C'：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

故$\begin{cases}25+5D+F=0,\\13+3D+2E+F=0,\\7+2D+\sqrt{3}E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-6,\\E=0,\\F=5,\end{cases}$

故圆C'的标准方程为$(x-3)^2+y^2=4$.

……………………………………… (4分)

(Ⅱ)易知$p=2$，抛物线的方程为$y^2=4x$.

设切线方程为$x=t(y-4)+4$，

由直线与圆C'相切可得，$\dfrac{|4t-1|}{\sqrt{1+t^2}}=2$，可得$12t^2-8t-3=0$，设方程的两根分别为$t_1$，$t_2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$t_1+t_2=\dfrac{2}{3}$，$t_1t_2=-\dfrac{1}{4}$. ………… (6分)

把$x=t(y-4)+4$代入抛物线C：$y^2=4x$中，

可得$y^2-4ty+16t-16=0$，

则4，y_1是方程$y^2-4t_1y+16t_1-16=0$的两根，可得$y_1=4t_1-4$，

同理可得，$y_2=4t_2-4$，则$M(4(t_1-1)^2,4t_1-4)$，$N(4(t_2-1)^2,4t_2-4)$，

则直线MN：$y-4t_1+4=\dfrac{1}{t_2+t_1-2}[x-4(t_1-1)^2]$，即$y-4t_1+4=-\dfrac{3}{4}[x-4(t_1-1)^2]$，

……………………………………… (8分)

则圆心$(3,0)$到直线MN的距离

$$d=\frac{\left|-\frac{3}{4}[3-4(t_1-1)^2]+4t_1-4\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$=\frac{1}{5}|12t_1^2-8t_1-13|$,

将 $12t_1^2-8t_1-3=0$ 代入,得 $d=2$,

故直线 MN 与圆 C' 相切. ………… (12 分)

22. 解:(Ⅰ)根据题意得,

$f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$,

易知 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的一个零点.

又 $f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-a$,

令 $g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-a$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\geqslant 0, x\in[1,+\infty)$,

当且仅当 $x=1$ 时等号成立,

故 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,且 $f'(1)=2-a$.

当 $a\leqslant 2$ 时,$f'(x)\geqslant f'(1)\geqslant 0$,故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,故 $f(x)\geqslant f(1)=0$ 恒成立,故 $a\leqslant 2$ 时,函数 $f(x)$ 仅有 $x=1$ 这一个零点. ………………………………… (3 分)

当 $a>2$ 时,由于 $f'(1)=2-a<0$,

$f'(e^a)=1+\frac{1}{e^a}>0$,根据零点存在性定理,必存在 $t\in(1,e^a)$,使得 $f'(t)=0$.

由于 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

故当 $x\in(1,t)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,此时 $f(x)<f(1)=0$,

取 $x_1\in(1,t)$,则 $f(x_1)<0$,当 $x_2\to+\infty$ 时,可知 $f(x_2)>0$,

故函数 $f(x)$ 还有一个在 (x_1,x_2) 上的零点,不合题意,舍去.

综上所述,a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant 2\}$.

………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)依题意,

$$2S_n=\begin{cases}\frac{4}{3}, n=1,\\ \frac{4}{3}+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{3+1}+\cdots+\frac{2}{n+1}, n\geqslant 2,\end{cases}$$

要证 $2S_n<\ln(n^2+3n+2)$.

当 $n=1$ 时,显然成立.

当 $n\geqslant 2$ 时,

由(Ⅰ)可知,当 $x>1$ 时,$(x+1)\ln x-2(x-1)>0$,即 $x>1$ 时,$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$,

则 $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)>\frac{\frac{4}{n}}{\frac{2}{n}+2}=\frac{2}{1+n}$,

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)>\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{1+k}$. …… (9 分)

因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$

$=\ln\left(1+\frac{2}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

$=\ln\left(3\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n+2}{n}\right)$

$=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$=\ln(n^2+3n+2)-\ln 2$,

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{1+k}=\frac{2}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\cdots+\frac{2}{n+1}=2S_n-\frac{1}{3}$,故 $\ln(n^2+3n+2)>2S_n+\ln 2-\frac{1}{3}>2S_n$.

………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。