绵阳南山中学 2023 年春高三入学考试数学试题（文科）

命题人：赵文廉　　　　　　审题人：董文宝

【说明】本试卷分为第Ⅰ、Ⅱ卷两部分，请将第Ⅰ卷选择题的答案填入答题卡内，第Ⅱ卷的答案或解答写在答题卷上．共 150 分，考试时间 120 分钟．

第Ⅰ卷(选择题，共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分．)

1．已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|\log_2 x<1\}$，则（　）

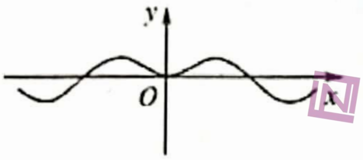
A．$A\cap B=\{x|x<1\}$　　　　B．$A\cup B=\mathbf{R}$

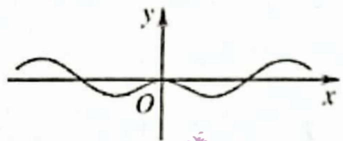
C．$A\cup B=\{x|x<1\}$　　　　D．$A\cap B=\{x|0<x<1\}$

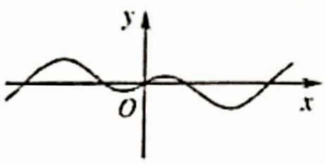
2．在复平面内，复数 z 对应的点为 $(1,-1)$，则 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=$（　）

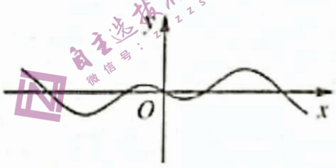
A．i　　　B．$-\mathrm{i}$　　　C．$2\mathrm{i}$　　　D．$-2\mathrm{i}$

3．我国著名数学家华罗庚曾说过：“数无形时少直观，形无数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休”．函数 $f(x)=(1-\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x})\sin x$ 的图象大致形状是（　）

A．

B．

C．

D．

4．中国古典乐器一般按“八音”分类，这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法，最早见于《周礼·春官·大师》，八音分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”，其中“金、石、木、革”为打击乐器，“土、匏、竹”为吹奏乐器，“丝”为弹拨乐器.某同学计划从“金、石、匏、竹、丝 5 种课程中选 2 种作兴趣班课程进行学习，则恰安排了 1 种课程为吹奏乐器、1 种课程为打击乐器的概率为（ ）

A．$\dfrac{3}{4}$　　　B．$\dfrac{2}{5}$　　　C．$\dfrac{3}{5}$　　　D．$\dfrac{2}{3}$

5．设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$\ln\dfrac{a}{b}>0$”是“$\ln a>\ln b$”的（　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

6．已知$\vec{a}=(\sin\alpha,1-4\cos 2\alpha)$，$\vec{b}=(1,3\sin\alpha-2)$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=$（　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．$-\frac{1}{7}$　　C．$\frac{2}{7}$　　D．$-\frac{2}{7}$

7．若函数$f(x)=\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，得到函数$g(x)$的图象，则下列关于$g(x)$叙述正确的是（　）

A．$g(x)$的最小正周期为2π　　B．$g(x)$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$内单调递增

C．$g(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{12}$对称　　D．$g(x)$的图象关于$(-\frac{\pi}{2},0)$对称

8．美国生物学家和人口统计学家雷蒙德·皮尔提出一种能较好地描述生物生长规律的生长曲线，称为“皮尔曲线”，常用的“皮尔曲线”的函数解析式可以简化为$f(x)=\frac{P}{1+a^{kx+b}}(P>0,a>1,k<0)$的形式．已知$f(x)=\frac{6}{1+3^{kx+b}}(x\in\mathrm{N})$描述的是一种果树的高度随着栽种时间$x$（单位：年）变化的规律，若刚栽种（$x=0$）时该果树的高为1.5m，经过2年，该果树的高为4.5m，则该果树的高度不低于5.4m，至少需要（　）

A．3年　　B．4年　　C．5年　　D．6年

9．已知m、n是两条不同的直线，α、β、γ是三个不同的平面.下列说法中不正确的是（　）

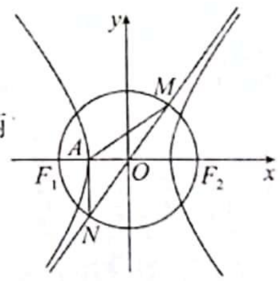
A．若$m//\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=n$，则$m//n$　　B．若$m//n$，$m//\alpha$，则$n//\alpha$

C．若$\alpha\cap\beta=n$，$\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则$n\perp\gamma$　　D．若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$\alpha//\gamma$，则$\beta//\gamma$

10．设抛物线$E:y^2=8x$的焦点为F，过点$M(4,0)$的直线与E相交于A，B两点，与E的准线相交于点C，点B在线段AC上，$|BF|=3$，则$\triangle BCF$与$\triangle ACF$的面积之比$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{7}$

11．设F_1，F_2分别为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，A为双曲线的左顶点，以$F_1F_2$为直径的圆交双曲线的某条渐近线于$M$，$N$两点，且$\angle MAN=135°$，（如图），则该双曲线的离心率为（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

12．已知$a-5=\ln\frac{a}{5}<0$，$b-4=\ln\frac{b}{4}<0$，$c-3=\ln\frac{c}{3}<0$，则a，b，c的大小关系是（　）

A．$b<c<a$　　B．$a<c<b$　　C．$a<b<c$　　D．$c<b<a$

第II卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．)

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, x\le 0\\ f(-x), 0<x\le 1\\ f(x-2), x>1\end{cases}$，则 $f(\frac{2021}{2})=$________.

14．若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则实数 a 的取值范围是______________.

15．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点都在球 O 的球面上，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{16}{3}$，则球 O 的表面积为__________.

16．设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $l_1: x+my=0$，和过定点 B 的动直线 $l_2: mx-y-m+3=0$ 交于点 P，圆 $C:(x-2)^2+(y-4)^2=3$，则下列说法正确的有_________.

①直线 l_2 过定点(1，3)；　　②直线 l_2 与圆 C 相交最短弦长为 2；

③动点 P 的曲线与圆 C 相交；　　④|PA|+|PB|最大值为 5.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．)

（一）必考题：共 60 分.

17．（本小题满分 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$.

（I）证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列；

（II）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18．（本小题满分 12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $2b\cos C=2a+c$.

（I）求角 B 的大小；

（II）若 $b=2\sqrt{3}$，D 为 AC 边上的一点，$BD=1$，且______，求 $\triangle ABC$ 的面积.

①BD 是 $\angle B$ 的平分线；②D 为线段 AC 的中点.（注：从①，②两个条件中任选一个，补充在上面的横线上并作答，如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）.

19.（本小题满分 12 分）每年 10 月是冬小麦最佳种植时间，但小麦的发芽会受到土壤、气候等多方面因素的影响．某科技小组为了解昼夜温差的大小与小麦发芽的颗数之间的关系，在不同的温差下统计了 100 颗小麦种子的发芽数，得到了如下数据：

温差 x/°C	8	10	11	12	13
发芽数 y/颗	79	81	85	86	90

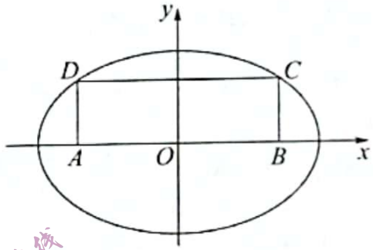
（I）请根据统计的最后三组数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（II）若由（I）中的线性回归方程得到的估计值与前两组数据的实际值误差均不超过两颗，则认为该线性回归方程是可靠的，试判断（I）中得到的线性回归方程是否可靠；

（III）若 100 颗小麦种子的发芽数为n颗，则记为$n\%$的发芽率，当发芽率为$n\%$时，平均每公顷地的收益为 150n 元，某农场有土地 10 万公顷，小麦种植期间昼夜温差大约为 9°C，根据（I）中得到的线性回归方程估计该农场种植小麦所获得的收益.

附：线性回归方程：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

20.（本小题满分 12 分）如图.矩形 ABCD 的长 $AB=2\sqrt{3}$，宽 $BC=\dfrac{1}{2}$，以 A、B 为左右焦点的椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 恰好过 C、D 两点，点 P 为椭圆 M 上的动点.



（I）求椭圆 M 的方程，并求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围；

（II）若过点 B 且斜率为k的直线交椭圆于 M、N 两点（点 C 与 M、N 两点不重合），且直线 CM、CN 的斜率分别为k_1、k_2，试证明k_1+k_2-2k为定值.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=(x+m)\ln x+2m\quad(m\in\mathbf{R})$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数.

（I）讨论$f'(x)$的单调性；

（II）是否存在$m\in\mathbf{Z}$，使得$f'(x)>\dfrac{m}{3}+2$，对$\forall x>1$恒成立？若存在，请求出m的所有值；若不存在，请说明理由.（参考数据：$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 5\approx 1.61$）

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. （本小题满分 10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]在平面直角坐标系 xOy 中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（t 为参数），以坐标原点 O 为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{6}{2+\sin^2\theta}$.

（I）求直线l的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程；

（II）已知点$M(2,0)$，若直线l与曲线 C 交于 A，B 两点，求$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}$的值.

23. （本小题满分 10 分）[选修 4-5：不等式选讲]已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=2$.

（I）证明：$\dfrac{25}{2}\le(a+2)^2+(b+1)^2<17$；

（II）若不等式$|3x+m+1|+|3x-m-1|\ge\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，求$m$的取值范围.