

高二数学(理科)

考生注意:

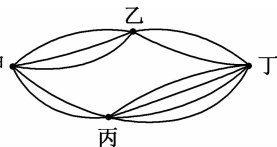
1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:北师大版选修 2-2,选修 2-3,选修 4-4。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z = \frac{1}{2+i^{2021}}$, 则 $\bar{z}$ 在复平面内所对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 如图,从甲地到乙地有 3 条路,从乙地到丁地有 2 条路;从甲地到丙地有 2 条路,从丙地到丁地有 4 条路. 则从甲地到丁地不同的路线



- A. 11 条 B. 12 条
C. 13 条 D. 14 条

3. 变量 x 与 y 的数据如表所示,其中缺少了一个数值,已知 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 1.2x - 3.8$, 则缺少的数值为

x	22	23	24	25	26
y	23	24	▲	26	28

- A. 24 B. 25 C. 25.5 D. 26

4. $\int_1^2 \frac{1}{x+1} dx =$

- A. $\ln 2$ B. $\ln \frac{2}{3}$ C. $\ln \frac{3}{2}$ D. $\ln 3$

5. 若曲线 $y = e^x + x$ 的一条切线 l 与直线 $x + 2y - 2021 = 0$ 垂直, 则切线 l 的方程为

- A. $2x - y + 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$
C. $2x - y - 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

6. 在极坐标系中, O 为极点, 曲线 $\rho^2 \cos \theta = 1$ 与射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的交点为 A , 则 $|OA| =$

A. 2

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{2}$

7. 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = \frac{a}{3^{k-1}} (k=1, 2, 3, 4, 5)$, 则 $P(X \geq 4) =$

A. $\frac{3}{121}$

B. $\frac{4}{121}$

C. $\frac{1}{121}$

D. $\frac{117}{121}$

8. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4, 6^2)$, $P(\xi \leq 5) = 0.89$, 则 $P(\xi \leq 3)$ 等于

A. 0.89

B. 0.22

C. 0.11

D. 0.78

9. 抛掷两枚质地均匀的骰子, 则在点数之和为 6 的条件下, 其中一枚点数为 2 的概率为

A. $\frac{1}{18}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{11}{36}$

D. $\frac{2}{3}$

10. 我们知道, $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$,
..., 若 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1\,296$, 则 $n =$

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

11. 若函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x$ 既有极大值又有极小值, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

B. $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

C. $(2, +\infty)$

D. $\{2\}$

12. 若实数 a, b, c, d 满足 $\frac{e^{a+1}}{b} = \frac{c-2}{d} = 1$, 则 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. 8

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则复数 $\bar{z} =$ _____.

14. $\left(3x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项为 _____. (用数字作答)

15. 设 P, Q 分别为曲线 $C: \begin{cases} x=1+2\cos \theta, \\ y=3+2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 与直线 $l: 3x-4y-6=0$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 _____.

16. 设随机变量 $X \sim B\left(n, \frac{1}{4}\right)$, 且 $D(X) = \frac{3}{4}$, 则事件“ $X=2$ ”的概率为 _____. (用数字作答)

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: \begin{cases} x=2\cos \alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 是参数}).$ 以 O 为极点, x 轴的正半轴为

极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$

- (1)求曲线 C 的普通方程以及直线 l 的直角坐标方程;
- (2)设 $P(-1,0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A 、 B 两点, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

高中阶段有这样一句话, 成也数学败也数学, 意思是说数学成绩好的同学总成绩也好, 数学成绩不好的同学总成绩也不好. 某市教育局对本届高三学生的上学期期末考试成绩进行随机调查得到如下 2×2 列联表:

	总成绩好	总成绩不好	总计
数学成绩好	220	m	400
数学成绩不好	100	300	400
总计	n	p	q

- (1)求表中 m, n, p, q 的值;
- (2)能否有 99.9% 的把握认为学生总成绩不好与数学成绩不好有关?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

2021 年 7 月 1 日是中国共产党建党 100 周年纪念日, 为迎接这一天的到来, 某高校组织了一场党史知识竞赛, 分为预选赛和决赛两部分, 已知预选赛的题目共有 9 道, 随机抽取 3 道让参赛者回答, 规定至少要答对其中 2 道才能通过预选赛, 某参赛人员甲只能答对其中 6 道, 记甲抽取的 3 道题目中能答对的题目数为 X .

- (1)求随机变量 X 的分布列和数学期望;
- (2)求甲没有通过预选赛的概率.

20. (本小题满分 12 分)

2021 年初, S 市出现了第一例新冠肺炎本土病例, 各大媒体, 微信公众号都在报道此事. 某微信公众号关于 S 市疫情的信息发布以后, 统计了网友的点击量 y 与发布时间 x 的相关数据, 如下表:

时间 x /分钟	5	10	15	20	25
点击量 y /次	98	193	280	369	460

- (1) 已知 y 与 x 线性相关, 利用表格中的数据, 求点击量 y 与发布时间 x 之间的回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;
- (2) 在(1)的条件下, 若点击量超过 1 000 次, 就达到了宣传效果, 那么 1 小时后, 该公众号是否达到了宣传效果?

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C: y^2 - 4x - 4 = 0$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$.

- (1) 求抛物线 C 的极坐标方程;
- (2) 若抛物线 C 与直线 l 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x) \geq ax - 1$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.