

2023 届湖南新高考教学教研联盟高三第二次联考



数学试题卷

审校、制作：湖南炎德文化实业有限公司

由 长郡中学；衡阳市八中；永州市四中；岳阳县一中；湘潭县一中；湘西州民中；
石门县一中；澧县一中；益阳市一中；桃源县一中；株洲市二中；麓山国际； 联合命题
郴州市一中；岳阳市一中；娄底市一中；怀化市三中；邵东市一中；洞口县一中

命题学校：澧县一中 审题学校：攸县一中

座位号

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考生号

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[2, 5]$ B. $[3, 5]$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$
2. 已知 i 为虚数单位, $z = 3 + i$, 则复数 $\frac{z}{z-1}$ 在复平面内对应的点所在的象限为
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知向量 a, b 满足 $(a+b) \cdot b = 2$, 且 $|b| = 1$, 则向量 a 在向量 b 上的投影向量为
A. 1 B. -1 C. b D. $-b$
4. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直, 则 a 的值为
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
5. 已知各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项的积为 T_n , 且 $T_7 > T_6 > T_8$, 若 $b_n = \lg a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 则当 S_n 取得最大值时, n 等于
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
6. 蹴鞠(如图所示), 又名蹴球、蹴圆、筑球、踢圆等, 蹴有用脚蹴、踢、蹋的含义, 鞠最早系外包皮革、内实米糠的球. 因而蹴鞠就是指古人以脚蹴、踢、蹋皮球的活动, 类似今日的足球. 2006 年 5 月 20 日, 蹴鞠已作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家非物质文化遗产名录, 已知某鞠的表面上有四个点 A, B, C, D .



姓名

12. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① $f(a+x)$ 为偶函数; ② $f(c+x) + f(c-x) = 2d, a \neq c$. $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则下列结论正确的是

- A. $f'(x)$ 关于 $x=c$ 对称
B. $f(2x)$ 的一个周期为 $2|c-a|$
C. $f'(c)$ 不关于 (c, d) 对称
D. $f(f(x))$ 关于 $x=a$ 对称

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 人群中患肺癌的概率约为 0.1%, 在人群中有 15% 是吸烟者, 他们患肺癌的概率约为 0.5%, 则不吸烟者中患肺癌的概率是_____ . (用分数表示)

14. 已知函数 $f(x) = \sin^2(\omega x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\omega x) (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$, 若 $f(\frac{\pi}{24}) = \frac{1}{2}$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{8})$ 上单调递增, 则 ω 的值为_____ .

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px, O$ 为坐标原点, 过抛物线的焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点 (点 A 在第一象限), 且 $AF=6$, 直线 AO 交抛物线的准线于点 C , $\triangle AOF$ 与 $\triangle ACB$ 的面积之比为 $4:9$, 则 p 的值为_____ .

16. 函数 $f(x) = e^{a \sin x} - a \sin x (a < -1)$. 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + a^3 > 3 \ln(\frac{1}{|a|})$ 成立, 则整数 a 的最大值为_____ . (参考数据: $\ln 2 = 0.7, \ln 3 = 1.1, \ln 5 = 1.6$)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 且满足 $a - 3b + 6b \sin^2 \frac{A+B}{2} = 0$.

- (1) 求证: $a + 3b \cos C = 0$;
(2) 求 $\tan A$ 的最大值.

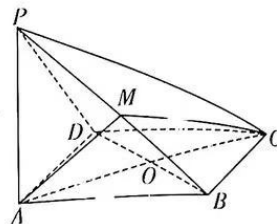
18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n - a_n$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $2b_n = (n-2)(a_n - 1)$, 若 $T_n \geq \lambda b_n$ 对于 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, AC 与 BD 交于点 O , $\angle BAD=60^\circ$, $PA=AB=2$, $PA \perp AC$, 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD , M 为线段 PB 上的一点.



(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 当 AM 与平面 PBD 所成的角的正弦值最大时, 求平面 MAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

一个不透明的盒子中有质地、大小相同的球 5 个, 其中红球 3 个, 黄球 2 个, 每次不放回的随机从盒中取一个球, 当盒中只剩一种颜色时, 停止取球.

(1) 求盒子中恰剩 2 个红球的概率;

(2) 停止取球时, 记盒子中所剩球的个数为 X , 求 X 的分布列与数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(0, \sqrt{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. F 为椭圆 E 的左焦点, 点 P

为直线 $l: x=3$ 上的一点, 过点 P 作椭圆 E 的两条切线, 切点分别为 A, B , 连接 AB, AF, BF .

(1) 求证: 直线 AB 过定点 M , 并求出定点 M 的坐标;

(2) 记 $\triangle AFM, \triangle BFM$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 当 $|S_1 - S_2|$ 取最大值时, 求直线 AB 的方程.

参考结论: 点 $Q(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点, 则过点 Q 的椭圆的切线方程

为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = kx \cos x - \sin x$.

(1) 若 $k=1$, 求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若存在 $t > 0$, 对 $\forall x \in (0, t)$, 恒有 $|f(x)| < x$, 求实数 k 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线