2020～2021学年高三押题信息卷

理科数学(一)

注意事项：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合M、N满足$M\subseteq N$，则$M\cap(\complement_U N)=$

A. M　　B. N　　C. $\varnothing$　　D. $\mathbf{R}$

2. 设i是虚数单位，复数z满足$(1+z)\mathrm{i}=1-z$，则$|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

3. “$\tan\theta=2$”是“$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

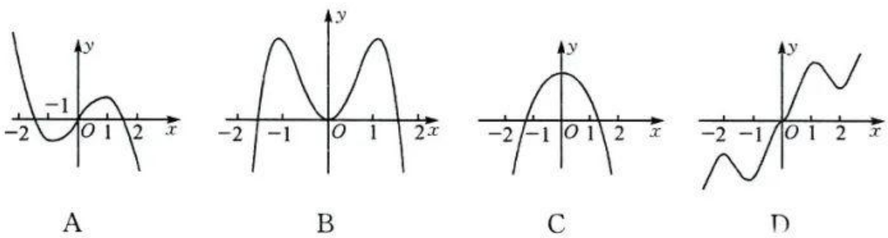
4. 西北某高校信息技术学院拟在2021年人工智能方向招收6名专项研究生，打算从人工智能领域的语音识别、人脸识别，数据分析、机器学习、服务器开发等五个方向展开研究，且每个方向均有研究生参与，其中刘同学研究人脸识别，则这6名研究生不同的分配方式共有

A. 480种　　B. 360种　　C. 240种　　D. 120种

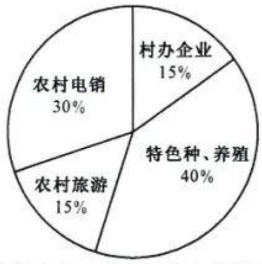
5. 关于x的方程$x+\frac{a}{x}=\frac{3}{2}a$，有下列四个命题：甲：$x=1$是该方程的根；乙：$x=2$是该方程的根；丙：该方程两根的平方和为5；丁：该方程两根异号. 如果只有一个命题是假命题，则这个假命题是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

6. 函数$f(x)=(2^x-2^{-x})\cos x$的部分图象为



7. 2021年2月18日，由中央广播电视总台摄制的八集脱贫攻坚政论专题片《摆脱贫困》首播，该节目由中央电视台和国家乡村振兴局联合制作. 国家乡村振兴局正式对外亮相. 中华人民共和国国家乡村振兴局是国务院直属机构，于2021年2月25日在北京市朝阳区太阳宫北街1号正式挂牌，前身为国务院扶贫开发领导小组办公室. 国家乡村振兴局设有信息中心、开发指导司、考核评估司、综合司等机构，多元促进乡村振兴. 如图是近3年关于乡村振兴和"精准扶贫"有关措施实施情况的统计饼状图，关于统计饼状图说法错误的是



近3年我国农村实施"精准扶贫"措施统计饼状图

A. 特色种、养殖在乡村振兴和"精准扶贫"中占有重要地位
B. 为了重点保护农村环境质量和改善民生，需要适度打造农村旅游品牌，倡导绿色消费理念
C. 乡村振兴需要将质优价廉的农产品通过电销销往全国各地，可以建立村一级的电销平台
D. 通过饼状图可以得到村办企业只占特色种、养殖的一半

8. 化简 $C_n^1+C_n^2 9+C_n^3 9^2+\cdots+C_n^n 9^{n-1}$ 所得结果为

A. 10^{n-1}　　B. $\frac{10^n-1}{9}$　　C. 9^{n-1}　　D. $\frac{9^n+1}{10}$

9. 已知直线 $y=x-1$ 与抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 交于 M,N 两点，且抛物线 C 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$（$O$ 为坐标原点），则 $|MN|$ 的值为

A. $4\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{6}$　　C. 8　　D. 6

10. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为内角 A,B,C 所对的边，若 $a(1+\cos B)=\sqrt{3}b\sin A$，$c=1$，则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

11. 已知 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a(a^x+1)-\frac{1}{2}x$，$g(x)=a^x$，若 $\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得 $g(2x_1)+mg(x_1)-f(2x_2)>0$ 成立，则实数 m 的取值范围为

A. $[\log_a 2-1,+\infty)$　　B. $[\log_a 2,+\infty)$　　C. $[\log_a 2-1,a^2)$　　D. $[a-1,\log_a 2-1)$

12. 在平面直角坐标系中，已知 A,B 分别是圆 $M:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 和圆 $F:(x-2)^2+y^2=4$ 上的动点，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱锥 $P-ABCD$，其外接球的半径为1，则该正四棱锥的侧面积为________.

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_n 和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2(n\in\mathbf{N}^*)$. 设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为____________.

15. 已知边长为2且相邻边的夹角为60°的菱形 $ABCD$ 的面积为 x，用斜二测画法画出的直观图 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 y，设函数 $f(m)=(2a-x)m^2+\sqrt{6}ym+a+1$ 对任意 $a\in[-1,2]$ 其函数值恒为正值，则实数 m 的取值范围为____________.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$，左顶点为 M，右焦点为 $F(c,0)$，过点 M 且斜率为1的直线 l 在第一象限分别交双曲线及其渐近线于点 B,A，以线段 BF 为直径的圆恰好经过点 A，则 $a+b+\frac{a}{c(b-a)}$ 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{4}$，$2a_{n+1}a_n-3a_{n+1}+a_n=0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

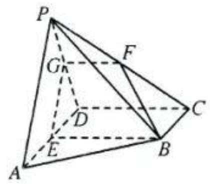
(2)设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和为 S_n，令 $b_n=2S_n-2n+3$，设数列$\left\{\frac{1}{(\ln b_n)^2}\right\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{1}{\ln^2 3}$.

18.（本小题满分 12 分）

如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC/\!/AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=1$，$PA=PD=AD=2$，E 为线段 AD 的中点，过 BE 的平面与棱 PD，PC 分别交于点 G，F.

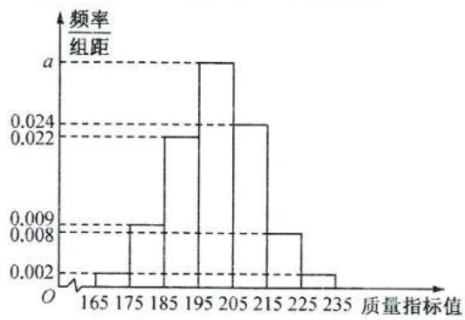
(1)求证：$GF\perp$ 平面 PAD；

(2)试确定点 G 的位置，使得直线 PB 与平面 $BEGF$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.



19.（本小题满分 12 分）

2021 年 2 月 25 日，全国脱贫攻坚总结表彰大会在北京举行. 经过全党全国各族人民共同努力，我国脱贫攻坚战取得了全面胜利，现行标准下 9 899 万农村贫困人口全部脱贫，832 个贫困县全部摘帽，12.8 万个贫困村全部出列，区域性整体贫困得到解决，完成了消除绝对贫困的艰巨任务，创造了又一个彪炳史册的人间奇迹！在全国脱贫攻坚总结表彰大会上，习近平总书记的庄严宣告直抵人心，催人奋进. 脱贫攻坚，贵在精准，重在精准. 某科研单位牵手某地农业部门，支持当地发展特色产业，形成具有特色的扶贫支援模式. 现从一批农产品中随机抽取 200 个品种作为样本，测量该农产品的一项质量指标值，该指标值越高越好. 由测量结果得到如下频率分布直方图：



(1)求 a 的值，并估计这 200 个品种的质量指标值的平均值.

(2)①由样本估计总体，结合频率分布直方图认为该产品的质量指标值 ξ 服从正态分布 $N(\mu,10^2)$，计算该批产品质量指标值落在$(180,220]$上的概率；

②根据科学研究和进一步优化新品种，达到提高质量的目的，定义$[165,185]$为"待培育"品种，$(185,215]$为"可推广"品种，$(215,235]$为"待观察"品种. 按照分层抽样，在这三个等级的样品中抽取 10 个样品，然后再从这 10 个样品中随机抽取 3 个，设含有"可推广"品种的个数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 $Q(-2,0)$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,设点 $P(a^2,0)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设过点 P 的直线 l 交椭圆于 A,B 两个不同的点,求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)设函数 $g(x)=-(x+1)e^x-\frac{a}{2}x^2+2ax-a$,若函数 $f(x)$的图象恒在函数 $g(x)$的图象上方,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:**坐标系与参数方程**

以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_1 的极坐标方程为:$\rho+3\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$,在平面直角坐标系下,将曲线 C_1 上的动点 P 的纵坐标不变,横坐标变为原来的一半得点 Q,记 Q 点轨迹为 C_2.

(1)求曲线 C_1 的直角坐标方程和曲线 C_2 的极坐标方程;

(2)A,B 是曲线 C_2 上两点,且$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$,求$|OA|-\sqrt{3}|OB|$的取值范围.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:**不等式选讲**

已知 $f(x)=|x+1|+|x+5|$.

(1)若不等式 $f(x)\geqslant m$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求实数 m 的取值范围;

(2)若 a,b,c 均为正数,且 $f(a)+f(b)+f(c)=30$,求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的最小值.

2020～2021 学年高三押题信息卷

理科数学(一)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	B	D	A	D	B	C	D	A	B

【答案提示】

1. C　因为 $M\subseteq N$，因而 $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$. 故选 C.

2. A　根据 $(1+z)\mathrm{i}=1-z$，得到 $\mathrm{i}+z\mathrm{i}=1-z$，$(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}$，所以 $|z|=1$. 故选 A.

3. A　根据题意得到 $\sin 2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{4}{5}$，解得 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\tan\theta=2$，因而"$\tan\theta=2$"是"$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$"的充分不必要条件. 故选 A.

4. B　当人脸识别方向有 2 名研究生时，有 $A_5^5=120$ 种，当人脸识别方向只有 1 名研究生时，有 $C_5^2A_4^4=240$ 种，因而共有 360 种. 故选 B.

5. D　根据题意若甲为假命题，则乙与丁矛盾；若乙为假命题，则甲与丁矛盾；若丙为假命题，则甲、乙与丁矛盾；当丁为假命题时，显然满足题意. 故选 D.

6. A　结合 $f(-x)=(2^{-x}-2^{x})\cos(-x)=-(2^x-2^{-x})\cos x=-f(x)$，得到该函数为奇函数，图象关于原点对称，因而排除选项 B、C，因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以只有选项 A 符合题意. 故选 A.

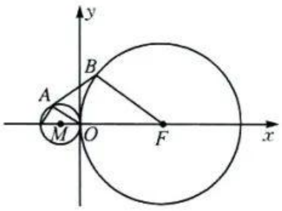
7. D　结合饼状图，容易看到选项 A，B，C 正确，选项 D 错误. 故选 D.

8. B　$C_n^1+C_n^29+C_n^39^2+\cdots+C_n^n9^{n-1}=\frac{1}{9}(C_n^19+C_n^29^2+C_n^39^3+\cdots+C_n^n9^n)=\frac{1}{9}(C_n^0+C_n^19+C_n^29^2+C_n^39^3+\cdots+C_n^n9^n-1)=\frac{10^n-1}{9}$. 故选 B.

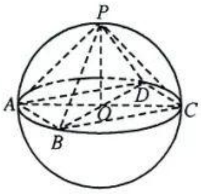
9. C　设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，由 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=x-1,\end{cases}$ 得 $x^2-2(1+p)x+1=0$，易知 $\Delta=4p^2+8p>0$，所以 $x_1+x_2=2(1+p)$. $y_1+y_2=2p$，由 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ 可得 $(x_1+x_2,y_1+y_2)=\frac{2}{3}(x,y)$，则 $(x,y)=\frac{3}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(3+3p,3p)$，将其代入抛物线 C 的方程得 $(3p)^2=2p(3+3p)$，因为 $p>0$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，所以 $x^2-6x+1=0$，所以 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$，所以 $|MN|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{6^2-4}=8$. 故选 C.

10. D　根据 $a(1+\cos B)=\sqrt{3}b\sin A$，得到 $\sin A(1+\cos B)=\sqrt{3}\sin A\sin B$，$\because 0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin A>0$，$1+\cos B=\sqrt{3}\sin B$，$2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$\because B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，根据正弦定理得到 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，根据 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{1}{2}<a<2$，$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

11. A　$f(2x_2)=\log_a(a^{2x_2}+1)-x_2=\log_a\left(\frac{a^{2x_2}+1}{a^{x_2}}\right)=\log_a(a^{x_2}+a^{-x_2})$，因为 $a>1$，$a^{x_2}+a^{-x_2}\geqslant 2$（当且仅当 $x_2=0$ 时取等号），所以 $f(2x_2)$ 的最小值是 $\log_a 2$. 由题意，$\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得 $g(2x_1)+mg(x_1)-f(2x_2)>0$ 成立，即 $\forall x_1\in(0,+\infty)$，$a^{2x_1}+ma^{x_1}>\log_a 2$ 成立，所以 $m>\frac{\log_a 2}{a^{x_1}}-a^{x_1}$ 对 $\forall x_1\in(0,+\infty)$ 恒成立. 设 $p=a^{x_1}$，则 $m>\frac{\log_a 2}{p}-p$ 对 $p>1$ 恒成立，设函数 $k(p)=\frac{\log_a 2}{p}-p(p>1)$，易知函数 $y=\frac{\log_a 2}{p}$ 与函数 $y=-p$ 在 $(1,+\infty)$ 内都是减函数，所以 $k(p)=\frac{\log_a 2}{p}-p(p>1)$ 在 $(1,+\infty)$ 是减函数，则 $k(p)=\frac{\log_a 2}{p}-p<\log_a 2-1$，所以 $m\geqslant\log_a 2-1$. 即 m 的取值范围是 $[\log_a 2-1,+\infty)$. 故选 A.



12. B　因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB})=-\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{FB}$，所以当 $\overrightarrow{FB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 同向时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 有最大值. 不妨设 A 点在 x 轴上方（含 x 轴），$\angle MOA=\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $B(2-2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$A(-\cos^2\alpha,\cos\alpha\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB})=-\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{FB}=-\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha+2\sin^2\alpha\cos\alpha=-3\cos^2\alpha+2\cos\alpha=-3\left(\cos\alpha-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$. 所以 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取得最大值 $\frac{1}{3}$. 故选 B.



13. $2\sqrt{3}$　如图所示，结合题意得到该正四棱锥的底面边长为 $\sqrt{2}$，侧面是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，因而其侧面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$.

14. $\frac{n}{8n+4}$　当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{8}(a_1+2)^2$，解得 $a_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_{n-1}=\frac{1}{8}(a_{n-1}+2)^2$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{8}(a_n+2)^2-\frac{1}{8}(a_{n-1}+2)^2$，整理可得：$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=4(a_n+a_{n-1})$，$\because a_n>0$，$\therefore a_n+a_{n-1}>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=4$. $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 以 2 为首项，4 为公差的等差数列，$\therefore a_n=2+4(n-1)=4n-2(n\in\mathbf{N}^*)$. $\therefore b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{4(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{8n+4}$.

15. $\left(0,\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\right)$　因为菱形 $ABCD$ 的面积为 $x=2\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，而直观图和实际图形的面积关系为 $x=2\sqrt{2}y$，所以这个菱形的直观图的面积为 $y=\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $f(m)=(2a-2\sqrt{3})m^2+3m+a+1$，设 $g(a)=(2m^2+1)a-2\sqrt{3}m^2+3m+1>0$，显然，函数 $g(a)$ 在 $a\in[-1,2]$ 上为单调递增函数，因而满足 $g(-1)>0$，解得 $0<m<\frac{3\sqrt{3}-3}{4}$，故实数 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\right)$.

16.2　根据题意得到直线 l 的方程为 $y=x+a$，代入双曲线渐近线方程得到 $A\left(\frac{a^2}{b-a},\frac{ab}{b-a}\right)$，由题意知 $AF\perp l$，所以 $\dfrac{\frac{ab}{b-a}-0}{\frac{a^2}{b-a}-c}=-1$，化简得到 $b-a=\frac{a^2+ab}{c}$，所以 $a+b+\frac{a}{c(b-a)}=a+b+\frac{1}{a+b}\geqslant 2\sqrt{(a+b)\cdot\frac{1}{a+b}}=2$（当且仅当 $a+b=1$ 时等号成立），故 $a+b+\frac{a}{c(b-a)}$ 的最小值为 2.

17.（1）解：因为 $2a_{n+1}a_n-3a_{n+1}+a_n=0$，显然 $a_{n+1}a_n\neq 0$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}-2$，$\frac{1}{a_{n+1}}-1=3\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，………………………… 3 分

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}-1=3$ 为首项，3 为公比的等比数列，

即 $\frac{1}{a_n}-1=3^n$，所以 $a_n=\frac{1}{3^n+1}$.　………………………… 6 分

（2）证明：结合（1）得到 $\frac{1}{a_n}=3^n+1$，其前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+n=\frac{3}{2}(3^n-1)+n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}+n-\frac{3}{2}$，………………………… 8 分

故 $b_n=2S_n-2n+3=3^{n+1}$，………………………… 10 分

所以 $\frac{1}{(\ln b_n)^2}=\frac{1}{(\ln 3^{n+1})^2}=\frac{1}{(n+1)^2\ln^2 3}<\frac{1}{n(n+1)\ln^2 3}=\frac{1}{\ln^2 3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $T_n<\frac{1}{\ln^2 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{\ln^2 3}$.　………………………… 12 分

18.（1）证明：连结 PE，因为 $BC=\frac{1}{2}AD$，且 E 为线段 AD 的中点，所以 $BC=DE$.

又 $BC/\!/AD$，所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形，所以 $BE/\!/CD$.　………………………… 1 分

又 $CD\subset$ 平面 PCD，$BE\not\subset$ 平面 PCD，所以 $BE/\!/$ 平面 PCD.　………………………… 2 分

又 $BE\subset$ 平面 $BEGF$，平面 $BEGF\cap$ 平面 $PCD=GF$，所以 $BE/\!/GF$.　………………………… 3 分

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，$BE\perp AD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $BE\perp$ 平面 PAD.　………………………… 4 分

因为 $PE\subset$ 平面 PAD，所以 $BE\perp PE$，………………………… 5 分

又因为 $BE/\!/GF$，所以 $GF\perp AD$，$GF\perp PE$，而 $PE\cap AD=E$，$PE,AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $GF\perp$ 平面 PAD.　………………………… 6 分

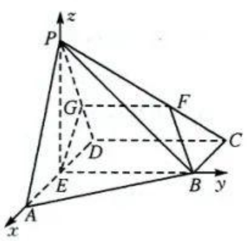
（2）解：G 为棱 PD 上靠近 D 的三等分点. 证明如下：

因为 $PA=PD$，E 为线段 AD 的中点，所以 $PE\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，………………………… 7 分

如图，以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EP}$ 的方向为 x,y,z 轴正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，



则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,1,0)$，$E(0,0,0)$，$D(-1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{DG}=\lambda\overrightarrow{DP}\ (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，得 $G(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda)$，所以 $\overrightarrow{EG}=(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda)$.　……………… 8 分

设平面 $BEGF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ (\lambda-1)x+\sqrt{3}\lambda z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}\lambda$，可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}\lambda,0,1-\lambda)$ 为平面 $BEGF$ 的一个法向量， ………………………………………… 9 分

设直线 PB 与平面 $BEGF$ 所成角为 α，

于是有 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{3}(\lambda-1)}{2\sqrt{3\lambda^2+(1-\lambda)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$； ……………………………… 10 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=-1$（舍去），所以当 G 为棱 PD 上靠近 D 的三等分点时，直线 PB 与平面 $BEGF$ 所成角的正弦值为

$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 由 $10\times(2\times0.002+0.008+0.009+0.022+0.024+a)=1$，解得 $a=0.033$， ………………………… 2 分

则平均值 $\bar{x}=10\times0.002\times170+10\times0.009\times180+10\times0.022\times190+10\times0.033\times200+10\times0.024\times210+10\times0.008\times220+10\times0.002\times230=200$，

即这 200 个品种的质量指标值的平均值约为 200. ……………………………………………… 4 分

(2) ①由题意可得 $\mu=\bar{x}=200,\sigma=10$，则 $P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)=P(180<\xi\leqslant220)\approx0.9545$，则该批产品指标值落在 $(180,220]$ 上的概率为 0.954 5. ……………………………………………………………………………… 7 分

②根据频率分布直方图得到落在区间[165,185]的“待培育”品种共有 22 个，落在区间(185,215]的“可推广”品种共有 158 个，落在区间(215,235]的“待观察”品种共有 20 个. 根据分层抽样的方法，抽取比例约为 1∶8∶1，因而各层抽取的样本数分别为 1，8，1， ………………………………………………………………………… 8 分

因而随机变量 X 的取值分别为 1，2，3，因为 $P(X=1)=\dfrac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

……………………………………………… 10 分

因而随机变量 X 的数学期望为 $1\times\dfrac{1}{15}+2\times\dfrac{7}{15}+3\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{12}{5}$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1) 设椭圆半焦距为 c，由题意得 $\begin{cases}a=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $c=\sqrt{3}$， ……………………………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… 4 分

(2) 当直线 l 的斜率为 0 时，$|PA|\cdot|PB|=12$，$|PA|+|PB|=2+6=8$，

所以 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$， ……………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 $l:x=my+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+4,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+8my+12=0$，

由 $\Delta=64m^2-48(m^2+4)>0$，得 $m^2>12$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{8m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{12}{m^2+4}$，所以 $y_1y_2>0$，所以 y_1,y_2 同号. ……………………………… 8 分

$|PA|\cdot|PB|=\sqrt{m^2+1}|y_1|\cdot\sqrt{m^2+1}|y_2|=\dfrac{12(m^2+1)}{m^2+4}$，

$|PA|+|PB|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1|+\sqrt{m^2+1}\,|y_2|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1+y_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot\dfrac{|8m|}{m^2+4}$, …………………… 10 分

$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{|8m|\sqrt{m^2+1}}{12(m^2+1)}=\dfrac{|2m|}{3\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{m^2+1}}$,

由 $m^2>12$，得 $\dfrac{12}{13}<1-\dfrac{1}{m^2+1}<1$，所以 $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}<\dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{m^2+1}}<\dfrac{2}{3}$,

综上，$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{4\sqrt{39}}{39},\dfrac{2}{3}\right]$. …………………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)=(x-2)e^x-\dfrac{a}{2}x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=(x-1)e^x-ax+a=(x-1)(e^x-a)$. …………………… 1 分

①当 $a\leqslant0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 2 分

②当 $0<a<e$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $\ln a<x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 上单调递减；

令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln a$ 或 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 3 分

③当 $a=e$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. …………………… 4 分

④当 $a>e$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $1<x<\ln a$，所以 $f(x)$ 在 $(1,\ln a)$ 上单调递减；

令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$ 或 $x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 5 分

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 6 分

(2) 根据函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $g(x)$ 图象上方，得到 $f(x)-g(x)>0$ 恒成立，

即不等式 $f(x)+(x+1)e^x+\dfrac{a}{2}x^2-2ax+a>0$,

等价于 $(2x-1)e^x>a(x-1)$. …………………… 7 分

①当 $x=1$ 时，$e>0$，则 $a\in\mathbf{R}$. …………………… 8 分

②当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$a<\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $h(x)=\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$，所以 $a<4e^{\frac{3}{2}}$. …………………… 9 分

③当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$a>\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $h(x)=\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)_{\max}=h(0)=1$，所以 $a>1$. ………………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(1,4e^{\frac{3}{2}})$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $C_1:\rho+3\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$ 得到 $C_1:\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，

所以化为直角坐标方程为：$\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$，………………………………………… 2 分

设 P 点坐标为 (x',y')，Q 点坐标为 (x,y)，

则有 $\dfrac{(x'-2)^2}{4}+y'^2=1$，$x'=2x$，$y'=y$，………………………………………… 4 分

消去 x'，y' 有 $(x-1)^2+y^2=1$，即 $x^2+y^2=2x$，此即为 C_2 的直角坐标方程.

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ………………………………………… 5 分

(2) 不妨设 $A(\rho_1,\theta)$，$B\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $|OA|-\sqrt{3}|OB|=\rho_1-\sqrt{3}\rho_2=2\cos\theta-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$. ………… 8 分

因为 $\theta-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $|OA|-\sqrt{3}|OB|$ 的取值范围是 $[-2,1)$. ………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 因为 $f(x)=|x+1|+|x+5|=|-x-1|+|x+5|\geqslant|-x-1-x+5|=4$，

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 4，故 $m\leqslant4$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,4]$. ………………………………………… 5 分

(2) 因为 a,b,c 均为正数，

所以 $f(a)=2a+6$，$f(b)=2b+6$，$f(c)=2c+6$.

因为 $f(a)+f(b)+f(c)=30$，

所以 $2a+6+2b+6+2c+6=30$，化简得 $a+b+c=6$. ………………………………………… 7 分

因为 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{6}\left(3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)\geqslant$

$\dfrac{1}{6}\left(3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}\right)=\dfrac{3}{2}$（当且仅当 $a=b=c=2$ 时等号成立），

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$. ………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》