高三阶段性考试
数学参考答案(文科)

1. A　由题意可得 $B=\{x|x>1\}$,则 $A\cap B=\{x|1<x<3\}$.

2. C　由题意可得 $z=2i(2-i)=2+4i$,则 $z+1=3+4i$,故 $|z+1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

3. D　由题意可得 $f(1)=1-2-1=-2$,则 $f(f(1))=f(-2)=2$.

4. A　因为 $\frac{b}{a}=2$,$2c=2\sqrt{5}$,所以 $b=2a$,$c=\sqrt{5}$,由 $a^2+b^2=c^2$,得 $5a^2=5$,解得 $a=1$.

5. D　因为 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,所以 $(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=4-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9=7$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,故向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$.

6. A　取 BB_1 上靠近 B_1 的四等分点 G,连接 DG,FG(图略),易证 $DG/\!/BE$,则 $\angle FDG$ 是直线 BE 与 DF 所成的角(或补角).设 $AB=2$,则 $DG=\sqrt{2}$,$DF=\sqrt{7}$,$FG=\sqrt{5}$,从而 $DG^2+FG^2=DF^2$,即 $DG\perp GF$,故 $\cos\angle FDG=\frac{DG}{DF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$.

7. D　由题意可得 $\begin{cases}9+8.7+9.3+x+y=9\times5,\\0+0.3^2+0.3^2+(x-9)^2+(y-9)^2=0.1\times5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=18,\\x^2+y^2=162.32,\end{cases}$ 则 $2xy=161.68$,从而 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=0.64$,故 $|x-y|=0.8$.

8. A　因为 $f(x)=\ln x-2x-a$,所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-2$.因为 $f(x)$ 是"有源"函数,所以 $\ln x-2x-a=\frac{1}{x}-2$ 有解,即 $a=\ln x-2x-\frac{1}{x}+2$ 有解.设函数 $g(x)=\ln x-2x-\frac{1}{x}+2$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2=\frac{-2x^2+x+1}{x^2}=\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2}$.由 $g'(x)>0$,得 $0<x<1$,由 $g'(x)<0$,得 $x>1$,则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,故 $g(x)\leqslant g(1)=-1$,即 $a\leqslant-1$.

9. A　由题意可得总的涂色方法有 $2^4=16$ 种,符合条件的涂色方法有 2 种,故所求概率 $P=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

10. B　由题意可得 $f(x)=-\cos 2x\sin 2x+\sqrt{3}\sin^2 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin(4x+\frac{\pi}{3})$,则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$,故 A 错误.令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant4x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=0$ 时,$x\in[\frac{\pi}{24},\frac{7\pi}{24}]$.因为 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]\subsetneqq[\frac{\pi}{24},\frac{7\pi}{24}]$,所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增,则 B 正确.令 $4x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,则 C 错误.当 $x\in[-\frac{\pi}{4},0]$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$,则 $-\sin(4x+\frac{\pi}{3})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$,故 D 错误.

11. C　设圆锥的底面半径为 r,则圆锥的高为 $2+\sqrt{4-r^2}$,

所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2(2+\sqrt{4-r^2})$.

令 $\sqrt{4-r^2}=t\in[0,2)$,则 $r^2=4-t^2$,所以 $V(t)=\frac{1}{3}\pi(4-t^2)(2+t)$.

因为 $V'(t)=-\frac{1}{3}\pi(t+2)(3t-2)$,

所以 $V(t)$ 在 $[0,\frac{2}{3})$ 上单调递增,在 $(\frac{2}{3},2)$ 上单调递减,

所以当 $t=\frac{2}{3}$，即 $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时，圆锥的体积最大，此时圆锥的高为 $\frac{8}{3}$，母线长为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

因为圆锥内切球的半径等于圆锥轴截面的内切圆的半径，

所以圆锥内切球的半径 $R=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{8}{3}}{\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{8\sqrt{6}}{3}}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{3}$.

12. B　由题意知 $\sin B\cos A-\sin A\cos B=\sin A$，则 $\sin(B-A)=\sin A$. 因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $B-A=A$，即 $B=2A$，则 $\sqrt{3}\sin B+2\sin^2 A=\sqrt{3}\sin 2A-\cos 2A+1=2\sin(2A-\frac{\pi}{6})+1$. 因为 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，则 $2<2\sin(2A-\frac{\pi}{6})+1<\sqrt{3}+1$，即 $\sqrt{3}\sin B+2\sin^2 A$ 的取值范围是 $(2,\sqrt{3}+1)$.

13. 9　画出可行域(图略)，当直线 $z=x+y$ 经过 $A(6,3)$ 时，z 取得最大值，最大值为 9.

14. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　由题意可得 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

15. $(1,2]$　设函数 $g(x)=f(x)+x-1$，因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，所以 $g(x)$ 的图象关于原点对称，故 $g(x)$ 是定义在 $[-4,4]$ 上的奇函数. 因为 $f(x)$ 是定义在 $[-4,4]$ 上的增函数，所以 $g(x)$ 也是定义在 $[-4,4]$ 上的增函数. 由 $f(2x)+f(x-3)+3x-5>0$，得 $f(2x)+2x-1+f(x-3)+x-3-1>0$，即 $g(2x)+g(x-3)>0$，即 $g(2x)>-g(x-3)=g(3-x)$，则 $\begin{cases}2x>3-x,\\-4\leqslant 2x\leqslant 4,\\-4\leqslant x-3\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant 2$，即不等式的解集为 $(1,2]$.

16. 128　由题意可得 $F(2,0)$，直线 l_1 的斜率存在且不为 0，设直线 l_1：$x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x=my+2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-8my-16=0$，则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，从而 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=8(m^2+1)$. 同理可得 $|DE|=8(\frac{1}{m^2}+1)$. 四边形 $ADBE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB||DE|=32(m^2+1)(\frac{1}{m^2}+1)=32(m^2+\frac{1}{m^2}+2)\geqslant 128$，当且仅当 $m^2=\frac{1}{m^2}$，即 $m=\pm 1$ 时，等号成立，即四边形 $ADBE$ 面积的最小值是 128.

17. 解：(1)由题意可得 $(a+20)+(a+20)+(a+40)+a=400$，解得 $a=80$. ………………………………… 3 分

列联表如下：

	少于 32 场比赛	不少于 32 场比赛	总计
男球迷	100	100	200
女球迷	120	80	200
总计	220	180	400

…………………………………………………………………………………………… 6 分

(2) $K^2=\frac{400\times(100\times80-100\times120)^2}{200\times200\times220\times180}=\frac{400}{99}\approx 4.04$. ……………………………………………… 10 分

因为 $4.04>3.841$，所以有 95% 的把握认为该社区的一名球迷是否为“资深球迷”与性别有关. …… 12 分

18. (1)解：由 $4S_n=a_n^2+2a_n$，得 $4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，两式相减得 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，…… 2 分

整理可得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. …… 3 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$. …… 4 分

在 $4S_n=a_n^2+2a_n$ 中，令 $n=1$，可得 $a_1=2$， …… 5 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=2n$. …… 6 分

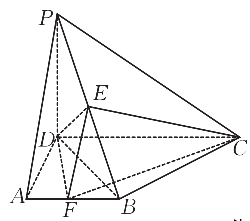
(2)证明：由(1)知 $b_n=\dfrac{1}{4n(n+1)}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$， …… 8 分

所以 $T_n=\dfrac{1}{4}[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]$，

即 $T_n=\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{n+1})$， …… 10 分

因为 $\dfrac{1}{n+1}>0$，所以 $T_n<\dfrac{1}{4}$. …… 12 分

19. (1)证明：连接 BD.



因为 $AB=AD$，且 $AB\perp AD$，所以 $BD=\sqrt{2}AB$.

因为 $PD=\sqrt{2}AB$，所以 $PD=BD$.

因为 E 是棱 PB 的中点，所以 $DE\perp PB$.

因为 $DE\perp PC$，PC，$PB\subset$ 平面 PBC，且 $PC\cap PB=P$，

所以 $DE\perp$ 平面 PBC.

因为 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\perp BC$. …… 2 分

由题意可得 $BC=BD=\sqrt{2}AB$，则 $BC^2+BD^2=CD^2$，故 $BC\perp BD$.

因为 BD，$DE\subset$ 平面 PBD，且 $BD\cap DE=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PBD.

因为 $PD\subset$ 平面 PBD，所以 $BC\perp PD$. …… 4 分

因为 $PD=BD=\sqrt{2}AB$，$PB=2AB$，所以 $PB^2=PD^2+BD^2$，所以 $PD\perp BD$. …… 5 分

因为 BD，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，且 $BD\cap BC=B$，所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$. …… 6 分

(2)解：因为 $AD=2$，$CD=4$，$AB\perp AD$，所以 $\triangle CDF$ 的面积 $S_1=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2=4$.

由(1)可知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=2\sqrt{2}$，则点 E 到平面 $ABCD$ 的距离 $d_1=\sqrt{2}$，

故三棱锥的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}S_1d_1=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. …… 7 分

因为 $AB=2$，所以 $PD=2\sqrt{2}$，则 $PA=2\sqrt{3}$.

因为 E，F 分别是棱 PB，AB 的中点，所以 $EF=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{3}$.

因为 $AB\perp AD$，且 $AB=AD=2$，所以 $DF=\sqrt{5}$，$BD=2\sqrt{2}$.

因为 $PD=BD=2\sqrt{2}$，$PB=4$，所以 $DE=2$. …… 9 分

由余弦定理可得 $\cos\angle DEF=\dfrac{4+3-5}{2\times 2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，则 $\sin\angle DEF=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$，

故 $\triangle DEF$ 的面积 $S_2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{33}}{6}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

设点 C 到平面 DEF 的距离是 d，则三棱锥 $C-DEF$ 的体积 $V_2=\dfrac{1}{3}S_2d=\dfrac{\sqrt{11}}{6}d$. …… 11 分

因为 $V_1=V_2$，所以 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}d$，解得 $d=\dfrac{8\sqrt{22}}{11}$. …… 12 分

20. 解：(1)因为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}c$，由 $a^2=b^2+c^2$，得 $b=c=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. …… 1 分

因为 $F_1(-c,0)$，$k=1$，所以直线 l 的方程为 $y=x+\frac{\sqrt{2}a}{2}$， ………………………………………… 2 分

将直线方程代入椭圆方程 $x^2+2y^2=a^2$ 并整理得 $3x^2+2\sqrt{2}ax=0$. ………………………………………… 3 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{2}a}{3}$，$x_1x_2=0$， ………………………………………… 4 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4a}{3}=\frac{8}{3}$，解得 $a=2$， ……………………… 5 分

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)易得直线 l 的方程为 $y=k(x+\frac{\sqrt{2}a}{2})$，椭圆 E 的方程为 $x^2+2y^2=a^2$， ……………………… 7 分

将直线方程代入椭圆方程并整理得 $(1+2k^2)x^2+2\sqrt{2}k^2ax+(k^2-1)a^2=0$. ……………………… 8 分

由条件得，$|AF_2|=5|AF_1|$，$|BF_1|=2|BF_2|$，

又因为 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，

可得 $|AF_1|=\frac{a}{3}$，$|BF_1|=\frac{4a}{3}$，所以 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|=\frac{5a}{3}$. ………………………………………… 9 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{2}k^2a}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{(k^2-1)a^2}{1+2k^2}$， ……………………… 10 分

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\frac{2\sqrt{2}k^2a}{1+2k^2})^2-\frac{4(k^2-1)a^2}{1+2k^2}}=\frac{2(1+k^2)a}{1+2k^2}=\frac{5a}{3}$， ……………………… 11 分

整理得 $4k^2=1$，又因为 $k<0$，所以 $k=-\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-2x+e^2-7$，则 $f'(x)=e^x-2$， ………………………………………… 1 分

从而 $f(2)=2e^2-11$，$f'(2)=e^2-2$， ………………………………………… 2 分

故所求切线方程为 $y-(2e^2-11)=(e^2-2)(x-2)$，即 $y=(e^2-2)x-7$. ……………………… 4 分

(2)对任意的 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 恒成立，

等价于对任意的 $x\geqslant 0$，$e^x-ax+e^2-7\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 恒成立.

①当 $x=0$ 时，$e^2-6\geqslant 0$ 显然成立. ………………………………………… 5 分

②当 $x>0$ 时，不等式 $e^x-ax+e^2-7\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 等价于 $4a\leqslant\frac{4e^x-7x^2+4e^2-28}{x}$.

设 $g(x)=\frac{4e^x-7x^2+4e^2-28}{x}$，则 $g'(x)=\frac{4(x-1)e^x-7x^2-4e^2+28}{x^2}$. ……………………… 6 分

设 $h(x)=4(x-1)e^x-7x^2-4e^2+28$，则 $h'(x)=4xe^x-14x=2x(2e^x-7)$. ……………………… 7 分

当 $x\in(0,\ln\frac{7}{2})$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(\ln\frac{7}{2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,\ln\frac{7}{2})$ 上单调递减，在 $(\ln\frac{7}{2},+\infty)$ 上单调递增. ……………………… 8 分

因为 $h(0)=4(6-e^2)<0$，所以 $h(\ln\frac{7}{2})<0$，且 $h(2)=0$， ………………………………………… 9 分

则当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(2)=4e^2-28$. ………………………………………… 11 分

故 $a\leqslant e^2-7$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,e^2-7]$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=2+3\cos\alpha,\\y=3\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),得$(x-2)^2+y^2=9$,

故曲线C的普通方程为$(x-2)^2+y^2=9$. ………………………………………… 2分

由$2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$,得$2x-y-1=0$,

故直线l的直角坐标方程$2x-y-1=0$. ………………………………………… 4分

(2)由题意可知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t,\\y=-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$($t$为参数). ………………………… 5分

将直线l的参数方程代入曲线C的普通方程并整理得$5t^2-8\sqrt{5}t-20=0$, ……………… 6分

设A,B对应的参数分别是t_1,t_2,

则$t_1+t_2=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$,$t_1t_2=-4$, ………………………………………… 7分

从而$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\dfrac{64}{5}+\dfrac{80}{5}}=\sqrt{\dfrac{144}{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$, ……………… 8分

故$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 10分

23. 解:(1)当$x<-3$时,$f(x)=-2x-1>5$; ………………………………………… 1分

当$-3\leqslant x\leqslant 2$时,$f(x)=5$; ………………………………………… 2分

当$x>2$时,$f(x)=2x+1>5$. ………………………………………… 3分

综上,$f(x)_{\min}=5$. ………………………………………… 4分

(2)当$x\in[-3,2]$时,$f(x)=|x-2|+|x+3|=5$, ………………………………………… 5分

则不等式$f(x)\geqslant|x+a|$恒成立,等价于不等式$5\geqslant|x+a|$恒成立. ……………………… 6分

从而$-x-5\leqslant a\leqslant -x+5$. ………………………………………… 7分

因为$x\in[-3,2]$,所以$-x-5\in[-7,-2]$,$-x+5\in[3,8]$, ……………………… 8分

故$-2\leqslant a\leqslant 3$,即a的取值范围为$[-2,3]$. ………………………………………… 10分