

2023 年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测 数学

数学测试卷共 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$

2. $\cos 198^\circ \cos 132^\circ + \cos 42^\circ \sin 18^\circ =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3. 设复数 z 满足 $\frac{z}{i} + \bar{z} \cdot i = 1$, 则 z 的虚部为

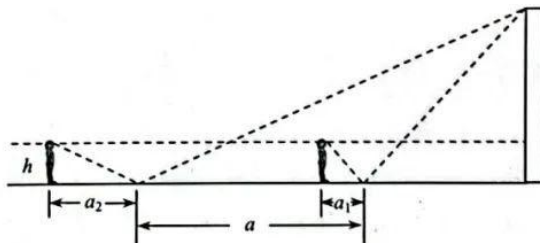
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

4. 某人有 1990 年北京亚运会吉祥物“盼盼”，2008 年北京奥运会吉祥物“贝贝”“晶晶”“欢欢”“迎迎”“妮妮”，2010 年广州亚运会吉祥物“阿祥”“阿和”“阿如”“阿意”“乐羊羊”，2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”，2022 年杭州亚运会吉祥物“琮琤”“莲莲”“宸宸”，若他从这 15 个吉祥物中随机取出两个，这两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会的概率是

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

5. 某班课外学习小组利用“镜面反射法”来测量学校内建筑物的高度. 步骤如下：①将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能看到房顶的位置，测量出人与镜子的距离；②将镜子后移，重复①中的操作；③求建筑物高度. 如图所示，前后两次人与镜子的距离分别 $a_1\text{m}$, $a_2\text{m}$ ($a_2 > a_1$)，两次观测时镜子间的距离为 $a\text{m}$ ，人的“眼高”为 $h\text{m}$ ，则建筑物的高度为

- A. $\frac{ah}{a_2 - a_1}\text{m}$
B. $\frac{(a_2 - a_1)h}{a}\text{m}$
C. $\frac{a(a_2 - a_1)}{h}\text{m}$
D. $\frac{ah^2}{a_2 - a_1}\text{m}$



6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $5S_9 = 9a_9 - 36$, 则 $a_4 =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过 F 且与 l_1 平行的直线与双曲线 C 及直线 l_2 依次交于点 B, D , 点 B 恰好平分线段 FD , 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
8. 已知 $a = \frac{2}{5}$, $b = e^{-\frac{3}{5}}$, $c = \ln 5 - \ln 4$, 则
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知两组样本数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 的均值和方差分别为 \bar{x}, \bar{y} 和 s_1^2, s_2^2 , 若 $x_i + y_i = 100$ 且 $x_i > y_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 则
- A. $\bar{x} > \bar{y}$ B. $\bar{x} + \bar{y} = 100$ C. $s_1^2 > s_2^2$ D. $s_1^2 = s_2^2$
10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F, G 分别是棱 AB, AD, AA_1 上的点, 则一定成立的是
- A. $|\overline{AE} + \overline{AF} + \overline{AG}|^2 = |\overline{AE}|^2 + |\overline{AF}|^2 + |\overline{AG}|^2$
- B. $|\overline{AE} + \overline{AF} + \overline{AG}| = |\overline{AE} - \overline{AF} - \overline{AG}|$
- C. $(\overline{AE} + \overline{AF} + \overline{AG}) \cdot \overline{EF} = 0$
- D. $\overline{AG} \cdot \overline{EF} + \overline{AF} \cdot \overline{EG} + \overline{AE} \cdot \overline{FG} = 0$
11. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$, 则使得“ $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 中心对称”成立的一个充分不必要条件是
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{3\pi}{4}$
- B. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后关于原点对称
- C. $f(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$
- D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称
12. 已知函数 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, 则
- A. $f(x)$ 有两个零点 B. 过坐标原点可作曲线 $f(x)$ 的切线
- C. $f(x)$ 有唯一极值点 D. 曲线 $f(x)$ 上存在三条互相平行的切线

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x})^9$ 的展开式中常数项为_____.
14. 已知 $a > 0, b > 0, 2a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值是_____.

15. 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的减函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且 $f(2) = -1$, 则不等式 $f(x+2) + f(x+4) > -3$ 的解集为_____.

16. 在 $\triangle PAB$ 中, $AB = 4$, $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 点 Q 满足 $\overrightarrow{QP} = 2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ})$, 则 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b = c(\cos A + \sin A)$.

(1) 求角 C ;

(2) 求 $\frac{a + \sqrt{2}b}{c}$ 的最大值.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设 $b_n = \lg^2 a_{n+1} - \lg^2 a_n$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和为 35, $b_4 = 9$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

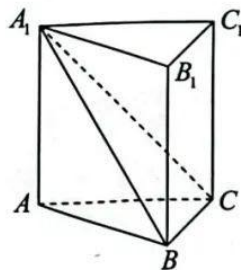
19. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 是正方形, 且平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, E 为线段 A_1C 的中点,

求平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小.



20. (12 分)

驾照考试新规定自 2022 年 8 月 1 日开始实施, 其中科目一的考试通过率低成为热点话题, 某驾校需对其教学内容和教学方式进行调整以帮助学员适应新规定下的考试, 为此驾校工作人员欲从该驾校的学员中收集相关数据进行分析和统计. 该驾校工作人员从 2022 年 7 月份该校首次参加科目一考试的新学员和 8 月份该校首次参加科目一考试的新学员中分别随机抽取了 25 人, 对他们首次参加科目一考试的成绩进行统计, 按成绩“合格”和“不合格”绘制成 2×2 列联表如下:

	合格	不合格	合计
2022年7月	20		
2022年8月		15	
合计			

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01	0.005
k	2.706	3.841	6.635	7.789

- (1) 完成题中的 2×2 列联表，并判断能否在犯错的概率不超过0.05的前提下认为“驾考新规的实施”对该驾校学员首次参加科目一考试的合格率有影响？
- (2) 若用样本中各月科目一考试的合格率作为该地区当月科目一考试通过的概率，已知该地区在2022年7月和8月首次参加科目一考试的学员人数之比为2:1，现从该地区在2022年7月和8月首次参加科目一考试的学员中随机抽取两名学员进行学情调查，设抽到的两名学员中有 X 人首次参加科目一考试不合格，求 X 的分布列与数学期望。

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $(2, \sqrt{2})$ ，点 O 为坐标原点。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 椭圆 C 上的动点 M, P, Q 满足直线 MP, MQ 的斜率互为相反数，且点 M 不在坐标轴上，设直线 PQ, OM 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求 $k_1 k_2$ 的值。

22. (12分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ ， $a > 0$ 。

- (1) 讨论 $f(x)$ 的零点个数；
- (2) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $e^{ax} \geq ax \cdot f(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线