哈尔滨市第九中学 2023 届高三第四次模拟考试

数学试卷答案

1.A 2.C 3.D 4.B 5.A 6.D 7.B 8.C

9.BCD 10.AD 11.BC 12.BCD

13.16　　14.$x^{\frac{2}{3}}$　(答案不唯一)　　15. $\frac{63}{125}$　　16.8

17. 解：(1) 在△ABC 中，$\dfrac{2\sqrt{3}ac\sin C}{(a^2+c^2-b^2)\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\cos B\sin A}$ ……1'

$\tan A+\tan B=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}$ ……2'

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\cos B\sin A}=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}$ 即 $\tan A=\sqrt{3}$，$A=60^\circ$，$\cos A=\dfrac{1}{2}$ ……4'

(2) $\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}AO\times BC$，$AO=\dfrac{1}{2}bc$. ……6'

又由 (1) 知 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\dfrac{2bc-3}{2bc}$， ……9'

$\therefore 0<bc\leq 3$（当且仅当 b=c 时等号成立），即 $0<AO\leq\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$AO 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$ ……10'

18．(1) 当点 P 为线段 EH 的中点时，平面 PAF // 平面 BGH.

证明如下：由题易知 $EH=2$，$GF=1$，$EH\,//\,GF$，因为点 P 为线段 EH 的中点，

所以 $HP=GF=1$，$HP\,//\,GF$，所以四边形 $HPFG$ 是平行四边形，所以

$HG\,//\,PF$，……1

因为 $PF\subset$ 平面 PAF，$HG\not\subset$ 平面 PAF，所以 $HG\,//$ 平面 PAF．……2

连接 PG，因为 $PE\,//\,GF$，$PE=GF=1$，所以四边形 $PEFG$ 是平行四边形，

所以 $PG\,//\,EF$，且 $PG=EF$，又 $EF\,//\,AB$，$EF=AB$，所以 $PG\,//\,AB$，$PG=AB$，所以

四边形 $ABGP$ 是平行四边形，所以 $PA\,//\,BG$，……3

因为 $PA\subset$ 平面 PAF，$BG\not\subset$ 平面 PAF，所以 $BG\,//$ 平面 PAF．……4

因为 $HG\subset$ 平面 BGH，$BG\subset$ 平面 BGH，$HG\cap BG=G$，

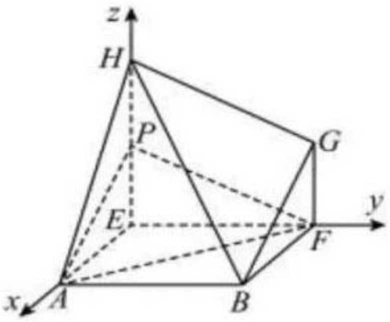
所以平面 PAF // 平面 BGH ……………………………………………………5

（2）因为 $AH=2\sqrt{2}$， $AE=EH=2$，

所以 $AE^2+EH^2=AH^2$，所以 $AE\perp EH$，

又 $EF\perp EA$， $EF\perp EH$，所以 EA，EF ，EH 两两垂直 ……………………………6

故以点 E 为坐标原点， EA， EF， EH 所在直线分别为 x， y， z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，



则 $A(2,0,0)$， $B(2,2,0)$， $H(0,0,2)$， $G(0,2,1)$． ……………………………………7

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{BH}=(-2,-2,2)$， $\overrightarrow{BG}=(-2,0,1)$ ．

设平面 ABH 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BH}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}2y_1=0\\ -2x_1-2y_1+2z_1=0\end{cases}$， 得 $y_1=0$， 取 $z_1=1$， 得 $\vec{m}=(1,0,1)$ ．………………8

BGH

设平面 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$， 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BH}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}-2x_2-2y_2+2z_2=0\\ -2x_2+z_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1$， 得

BGH

$\vec{n}=(1,1,2)$ ．………………………………………………………………10

ABH

设平面 与平面 所成角为 θ，

则

$$|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|1\times1+0\times1+1\times2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\times\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$ ……………………………11

BGH

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$， ……………………………………12

ABH

所以平面 与平面 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$ ．

19．解：（1）由频率分布直方图可得 $(0.008+2m+0.024+0.032+0.004)\times10=1$，

解得 $m=0.016$. ……………………………………………………………………2'

平均数

$a=10\times(0.008\times10+0.016\times20+0.024\times30+0.032\times40+0.016\times50+0.004\times60)$

$=10\times(0.08+0.32+0.72+1.28+0.80+0.24)=34.4$. ……………………………………4'

（2）由题意，$\mu=a=34.4$，且 $14.4=34.4-20=\mu-2\sigma$，$44.4=34.4+10=\mu+\sigma$，

故 $P(X>44.4)=P(X>\mu+\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.683)=0.1585$，

所以在时间大于44.4分钟的平台内约有 $10000\times0.1585=1585$ 件；……………………5'

$P(X<14.4)=P(X<\mu-2\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.954)=0.023$，

所以在时间小于14.4分钟的平台内约有 $10000\times0.023=230$ 件；……………………6'

则“合格平台”约有 $10000-1585-230=8185$ 件，……………………………………7'

所以需要资金为 $1585\times\left(-\frac{100s}{317}\right)+230\times\frac{s^3}{23}+8185=10s^3-500s+8185$，……………………9'

设 $f(s)=10s^3-500s+8185(0<s<10)$，则 $f'(s)=30s^2-500$，……………………10'

当 $0<s<\frac{5\sqrt{6}}{3}$ 时，$f'(s)<0$，当 $\frac{5\sqrt{6}}{3}<s<10$ 时，$f'(s)>0$，

所以 $f(s)$ 在 $\left(0,\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{5\sqrt{6}}{3},10\right)$ 单调递增.

故 $f(s)$ 有最小值 $f\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)=8185-\frac{5000\sqrt{6}}{9}\approx6824$，故至少需要准备6824元.……………12'

20. 解：（1）$a_{n+1}-(n+1)^2+(n+1)=2(a_n-n^2+n)$ ……………………………………1'

又 $a_1-1^2+1=1$……………………………………………………………………2'

所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列 ……………………………………3'

$b_n=2^{n-1}$

所以 $a_n-n^2+n=2^{n-1}$ 即 $a_n=2^{n-1}+n^2-n$，……………………………………4'

（2）由（1）知 $c_n=(2n-1)2^{n-1}$，

$\therefore T_n=1\times2^0+3\times2^1+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}$，①

$\therefore 2T_n=1\times2^1+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，② ……………………5'

由①-②有：$-T_n=1+2(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)2^n$

$=1+\dfrac{2^2-2^{n+1}}{1-2}-(2n-1)2^n$

$=-(2n-3)2^n-3$ ……………………………………………………7'

$\therefore T_n=(2n-3)2^n+3;$ ……………………………………………………8'

(3) $d_n=1-(-\dfrac{1}{2})^n$

①当 n 为奇数时，$d_n=1+(\dfrac{1}{2})^n$，d_n 随着 n 的增大而减小，则 $1<d_n\le d_1=\dfrac{3}{2}$，又 $d_n-\dfrac{1}{d_n}$ 随着 d_n 的增大而增大，故 $0<d_n-\dfrac{1}{d_n}\le\dfrac{5}{6}$； ……………………………………10'

②当 n 为偶数时，$d_n=1-(\dfrac{1}{2})^n$，d_n 随着 n 的增大而增大，则 $\dfrac{3}{4}=d_2\le d_n<1$，又 $d_n-\dfrac{1}{d_n}$ 随着 d_n 的增大而增大，，故 $-\dfrac{7}{12}\le d_n-\dfrac{1}{d_n}<0$ ……………………………12'

综上，$d_n-\dfrac{1}{d_n}$ 的最大值与最小值分别为 $\dfrac{5}{6}$，$-\dfrac{7}{12}$ ……………………………无扣一分

21.（1）设动圆的半径为r，由题意得圆F_2的圆心为$F_2(2,0)$，半径$R=4\sqrt{2}$；

所以$|DF_1|=r$，$|DF_2|=R-r$，

则$|DF_1|+|DF_2|=4\sqrt{2}>4=|F_1F_2|$. ……………………………………………………2'

所以动点D的轨迹C是以F_1，F_2为焦点，长轴长为$4\sqrt{2}$的椭圆.

因此轨迹C方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4'

（2）$\frac{k}{m}$为定值，且$\frac{k}{m}=\frac{1}{2}$，

因为$|MP|\cdot S_2=|NP|\cdot S_1$，则$\frac{|MP|}{|NP|}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|MP||PQ|\sin\angle MPQ}{\frac{1}{2}|NP||PQ|\sin\angle NPQ}=\frac{|MP|\sin\angle MPQ}{|NP|\sin\angle NPQ}$，

因此$\sin\angle MPQ=\sin\angle NPQ$，所以$\angle MPQ=\angle NPQ$， ……………………………5'

于是PQ平分$\angle MPN$，直线MP,NP的斜率k_{MP},k_{NP}互为相反数，即$k_{MP}+k_{NP}=0$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x=my+1\end{cases}$得，消去 x，得$(m^2+2)y^2+2my-7=0$，即有$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+2}\\ y_1\cdot y_2=\frac{-7}{m^2+2}\end{cases}$， ……6'

而$k_{MP}+k_{NP}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=0$，则$(y_1-y_0)(x_2-x_0)+(y_2-y_0)(x_1-x_0)=0$，

即$(y_1-y_0)[(my_2+1)-x_0]+(y_2-y_0)[(my_1+1)-x_0]=2my_1y_2-(my_0+x_0-1)(y_1+y_2)+2y_0(x_0-1)=0$

于是$\frac{-14m}{m^2+2}-(my_0+x_0-1)\cdot\frac{-2m}{m^2+2}+2y_0(x_0-1)=0$

$\Leftrightarrow -14m+2m(my_0+x_0-1)+2y_0(x_0-1)(m^2+2)=0$,

化简得：$x_0y_0m^2+(x_0-8)m+2y_0(x_0-1)=0$, ……8'

且又因为$P(x_0,y_0)$在椭圆上,

即$\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}=1$，即$x_0^2+2y_0^2=8$，$x_0-8=-2y_0^2-x_0^2+x_0$,

从而$x_0y_0m^2+(-2y_0^2-x_0^2+x_0)m+2y_0(x_0-1)=0$,

即$(x_0m-2y_0)[y_0m-(x_0-1)]=0$, ……10'

又因为$P(x_0,y_0)$不在直线$l:x=my+1$上，所以$my_0\neq x_0-1$, ……11'

则有$x_0m-2y_0=0$，即$\frac{1}{m}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{k}{m}=\frac{1}{2}$,

所以$\frac{k}{m}$为定值，且$\frac{k}{m}=\frac{1}{2}$. ……12'

22.（1）由题意，$y'=2ax+b$，$y''=2a$，则$\kappa=\frac{|2a|}{(1+(2ax+b)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2|a|}{(4a^2x^2+4abx+b^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, ……2'

又$4a^2x^2+4abx+b^2+1>0$，故当$4a^2x^2+4abx+b^2+1$最小时κ最大,

此时$x=-\frac{4ab}{2\times4a^2}=-\frac{b}{2a}$，即抛物线$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）在$x=-\frac{b}{2a}$处弯曲程度最大. ……4'

（2）$\because g''(x)=12lnx-12ax,h''(x)=2xe^x+2a$

又$\because$由题意可知$g(x),h(x)$曲率为 0 时，即$g''(x)=0,h''(x)=0$

$\therefore a=\frac{lnx}{x}=-xe^x$ ……5'

$\therefore$令$G(x)=\frac{lnx}{x}$,则$G'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$,即$G(x)$在$(0,e)$上单调递增在$(e,+\infty)$上单调递减,

且$G(x)_{max}=G(e)=\frac{1}{e}$ ……6'

又$\because a\in(0,\frac{1}{e})$,$g(x)$曲率为 0 时$x$的最小值为$x_1$

$\therefore 0<x_1<e$,同理可得$x_2<-1$, ……7'

则令$\frac{1}{x_1}=m,e^{x_2}=n$,有$m>\frac{1}{e},0<n<\frac{1}{e}$ ……8'

$\therefore$可令$m=nt,(t>1)$则$\frac{1}{x_1}=t\cdot e^{x_2}$又由$\therefore a=\frac{lnx}{x}=-xe^x$可知$\frac{1}{x_1}\cdot ln\frac{1}{x_1}=e^{x_2}\cdot lne^{x_2}$ $\therefore$

$lnn=\frac{tlnt}{1-t},lnm=\frac{lnt}{1-t}$……………………………………………………………9'

故所证不等式可等价为$\frac{2lnt+tlnt}{1-t}<-\frac{8}{3}$,即$lnt>\frac{8}{3}\cdot\frac{t-1}{t+2}$……………………………………10'

$\therefore$构造函数$F(t)=lnt-\frac{8}{3}\cdot\frac{t-1}{t+2}(t>1)$……………………………………………………11'

$\because F'(t)=\frac{(t-2)^2}{t(t+2)^2}$即$F'(t)\geq 0$,即$F(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增

$\therefore F(t)>F(1)$,其中$F(1)=0$,故$F(t)>0$,即原式成立

故原命题成立，即$\frac{{x_1}^2}{e^{x_2}}>e^{\frac{8}{3}}$……………………………………………………………12'