2023届芜湖市高中毕业班教学质量统测

数学试题参考答案

选择题

一、选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	B	D	D	B	B	A

二、选择题：

9	10	11	12
ABD	AD	ABD	ABD

非选择题

三、填空题：

13. $\frac{3}{5}$　　14. 173.5　　15. $\sqrt{3}-1$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　16. 6

四、解答题：

17. 证明：

(1) $\because E,F$分别为PD,PC的中点

$\therefore EF//CD$且$EF=\frac{1}{2}CD$

$\because \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{NB}$

$\therefore MN//AB$且$MN=\frac{2}{3}AB$

$\because AB//CD$且$AB=CD$

$\therefore EF//MN$且$EF\neq MN$

$\therefore$ 四边形$EMNF$为梯形

$\therefore$ 直线ME与直线NF相交 ……………………………………………………………………（4分）

(2) $\because PA\perp$平面$ABCD$且$ABCD$为正方形

$\therefore$ 以A为原点，AB,AD,AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系．

则$M(0,0,2)$，$N(4,0,2)$，$F(3,3,3)$

$\therefore \overrightarrow{MN}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{MF}=(3,3,1)$

设平面NME的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_0=0\\ 3x_0+3y_0+z_0=0\end{cases}$

令$y_0=1$，得$\boldsymbol{m}=(0,1,-3)$

记平面$ABCD$的法向量为$\boldsymbol{n}$,则$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ ……………………………………………………… (8分)

$\therefore \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore$ 平面NMF与平面$ABCD$夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………………… (10分)

(几何法求解,酌情给分)

18.

(1)$\because f(x)\leqslant\left|f(-\dfrac{\pi}{6})\right|$

$\therefore\left[f(-\dfrac{\pi}{6})\right]^2=a^2+1$得$(a+\sqrt{3})^2=0$

$\therefore a=-\sqrt{3}$ ……………………………………………………………………………………… (5分)

(2)$f(x)=-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=-2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

选①

(1)当$f(x)$同为最大值或最小值时,得$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}A\cdot kT\geqslant\dfrac{1}{2}A\cdot T=\dfrac{1}{2}\times 2\times\pi=\pi$ ……… (9分)

(2)当$f(x)$一个为最大值,另一个为最小值时,

得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2A\cdot k\dfrac{T}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}A\cdot T=\dfrac{1}{2}\times 2\times\pi=\pi$

综上:$\triangle ABC$面积的最小值为π ………………………………………………………………… (12分)

选②

由复数的几何意义知:$A(-2,-4)$,$B(-2,f(t))$

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times 2\times|AB|=|AB|=|f(t)+4|=-2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+4$ ……………………………… (9分)

$\therefore S_{\triangle OAB}\in[2,6]$ ……………………………………………………………………………… (12分)

19.

(1)由题意可得,中奖人数X服从二项分布:$X\sim B(3,\dfrac{1}{3})$

$\because P(x=i)=C_3^i(\dfrac{1}{3})^i(\dfrac{2}{3})^{3-i}(i=0,1,2,3)$

$\therefore P(x=0)=\dfrac{8}{27}$,$P(x=1)=\dfrac{12}{27}$,$P(x=2)=\dfrac{6}{27}$,$P(x=3)=\dfrac{1}{27}$

$\therefore$ 分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{1}{27}$

$\therefore$ 中奖人数X的方差为$D(x)=3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………… (4分)

(2)若改变选择,由题意可知获得奖金数记为Y,则Y的可能值为0,400

则$P(Y=0)=\frac{1}{3}$，$P(Y=400)=\frac{2}{3}$

$\therefore$ 分布列为

Y	0	400
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\therefore E(Y)=0\times\frac{1}{3}+400\times\frac{2}{3}=\frac{800}{3}$(元) ………………………………………………………………（8分）

若不改变选择，由题意可知获得奖金数记为Z，则Z的可能值为50，200

则$P(Z=50)=\frac{2}{3}$，$P(Z=200)=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 分布列为

Z	50	200
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\therefore E(Z)=50\times\frac{2}{3}+200\times\frac{1}{3}=100$(元)

$\because E(Y)>E(Z)$

$\therefore$ 建议抽奖人改变选择. ………………………………………………………………（12分）

20.

(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q

$\therefore a_{b_n}=a_1+(b_n-1)d=2^{n+1}-1$，$\therefore b_nd+1-d=2^{n+1}-1$ $\therefore 1-d=-1$，$b_nd=2^{n+1}$

$\therefore d=2$，$b_n=2^n$，$\therefore a_n=2n-1$ ………………………………………………………………（6分）

(2)由题意可知

$\{c_n\}$的前100项中，有数列$\{a_n\}$的前93项，数列$\{b_n\}$的前7项 ……………………………（8分）

记$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$的前n项和分别A_n，B_n，C_n.

$\therefore C_{100}=A_{93}+B_7=93+\frac{93\times92}{2}\times2+\frac{2-2^8}{1-2}=8649+254=8903$ ……………………（12分）

21. 解

(1)$f'(x)=3(1+\ln x)-3ax^2+6=3(3+\ln x-ax^2)$

令$f'(x)=0$，即$3+\ln x-ax^2=0$，得$a=\frac{3+\ln x}{x^2}$，令$g(x)=\frac{3+\ln x}{x^2}$

由$g'(x)=\frac{-2\ln x-5}{x^3}$，则

$0<x<e^{-\frac{5}{2}}$时，$g'(x)>0$，$x>e^{-\frac{5}{2}}$时，$g'(x)<0$

所以$g(x)$在区间$(0,e^{-\frac{5}{2}})$单调递增，在区间$(e^{-\frac{5}{2}},+\infty)$单调递减

又$x\to0^+$时，$g(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to0^+$，$g(e^{-\frac{5}{2}})=\frac{1}{2}e^5$

所以当$a=\frac{1}{2}e^{5}$时，$f'(x)$有且只有一个零点．…………………………………………………（5分）

（2）$f'(x)=3x^{2}(\frac{3+\ln x}{x^{2}}-a)$，由（1）知，当$a\geqslant\frac{1}{2}e^{5}$时，$f'(x)\leqslant 0$

所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递减，$f(x)$无最大值；

当$0<a<\frac{1}{2}e^{5}$时，$f'(x)$有两个零点$x_1<x_2$，易知$0<x_1<e^{-\frac{5}{2}}<x_2$

当$0<x<x_1$或$x>x_2$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$单调递减

当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$单调递增

又$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，$0<x<x_1<e^{-\frac{5}{2}}<e^{-2}$时，$f(x)<0$……………………………………（8分）

所以$f(x)$有最大值$\Leftrightarrow f(x_2)\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\ln x_2+3}{x_2^{2}}-a=0\\ \ln x_2-\frac{1}{3}ax_2^{2}+2\geqslant 0\end{cases}$

消去a，得$\frac{2}{3}\ln x_2+1\geqslant 0\Rightarrow x_2\geqslant e^{-\frac{3}{2}}$

结合$a=g(x_2)$以及$g(x)$在区间$(e^{-\frac{5}{2}},+\infty)$单调递减，得$0<a\leqslant\frac{3}{2}e^{3}$ ……………………（12分）

22. 解：

（1）由题意，圆心C满足抛物线定义，且焦点为$M(1,0)$，准线为$x=-1$，所以$\frac{p}{2}=1$，

所以$C:y^{2}=4x$．…………………………………………………………………………………………（4分）

（2）（i）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

因为AB过点$M(1,0)$

所以设$l_{AB}:x=my+1$，联立$y^{2}=4x$

得：$y^{2}-4my-4=0$

所以$y_1y_2=-4$　　（*）

又$N(2,0)$，可设$l_{AN}:x=\frac{x_1-2}{y_1}y+2$，联立$y^{2}=4x$

得：$y^{2}-\frac{4(x_1-2)}{y_1}y-8=0$

所以$y_1y_3=-8$，同理：$y_2y_4=-8$　　（**）

又$k_1=k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^{2}}{4}-\frac{y_2^{2}}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$

同理$k_2=k_{PQ}=\frac{4}{y_3+y_4}$，再结合（*）式及（**）式

所以$k_2=k_{PQ}=\frac{4}{\frac{-4p}{y_1}+\frac{-4p}{y_2}}=\frac{2}{y_1+y_2}$

所以$k_1=2k_2$. ………………………………………………………………………………………（8分）

（ii）由（i）过程同理知$k_{AQ}=\dfrac{4}{y_1+y_4}$

可设$l_{AQ}:y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_4}(x-x_1)$，又$y_2y_4=-8$

所以$l_{AQ}:y-y_1=\dfrac{4}{y_1-\dfrac{8}{y_2}}\left(x-\dfrac{y_1^2}{4}\right)$，又$y_1y_2=-4$

即：$l_{AQ}:y=-\dfrac{y_2}{3}x+\dfrac{2y_1}{3}$

同理：$l_{BP}:y=-\dfrac{y_1}{3}x+\dfrac{2y_2}{3}$

联立以上两直线方程，消去y得：$x=-2$

所以直线QA和PB的交点T在定直线$x=-2$上.

从而当点M到直线$x=-2$的距离即为MT长度的最小值，

所以$|MT|_{\min}=3$. ………………………………………………………………………………（12分）