常州市教育学会学业水平监测

高三数学

2022年11月

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将答题卡交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\sqrt{2-x}\leqslant 1\}$，$B=\{x||x-2|\leqslant 1\}$，则集合 $(C_UA)\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{x|2<x\leqslant 3\}$　　C．$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　　D．$\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

【答案】B

【解析】 $A=\{x|0\le 2-x\le 1\}=\{x|1\le x\le 2\}$，$\complement_U A=\{x|x<1或x>2\}$

$B=\{x|1\le x\le 3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x|2<x\le 3\}$，选B.

2．记△ABC的内角为A，B，C，则“$A=B$”是“$\sin A=\sin B$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】C

【解析】 $\triangle ABC$中，$A=B$是$\sin A=\sin B$的充要条件，选C.

3．已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$，且$a_2+a_3=6$，$a_3a_4=a_6$，则$a_4=$

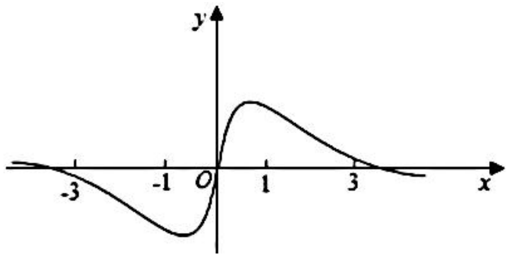
A．8　　B．12　　C．16　　D．20

【答案】A

【解析】 等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_4=a_1a_6$，$\therefore a_1=1$，$a_2+a_3=6$，$\therefore q+q^2=6$，

又$q>0$，$\therefore q=2$，$a_4=a_1q^3=8$，选A.

4．如图，该图象是下列四个函数中的某个函数的大致图象，则该函数是



A．$y=\dfrac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B．$y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$　　C．$y=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D．$y=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$

【答案】D

【解析】 $f(1)>0$，排除B，$f(3)>0$，排除AC，选D.

5．若$(1-ax+x^2)(1-x)^8$的展开式中含x^2的项的系数为21，则$a=$

A．-3　　B．-2　　C．-1　　D．1

【答案】C

【解析】 $(1-x)^8$展开式第$r+1$项$T_{r+1}=C_8^r1^{8-r}(-x)^r=(-1)^rC_8^rx^r$，

x^2的系数$1\cdot(-1)^2C_8^2-a\cdot(-1)C_8^1+1\cdot(-1)^0C_8^0=21$，$\therefore a=-1$，选C.

6．设随机变量$\xi\sim N(\mu,4)$，函数$f(x)=x^2+2x-\xi$没有零点的概率是0.5，则$P(1<\xi\leqslant 3)=$

附：随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9545$.

A．0.1587　　B．0.1359　　C．0.2718　　D．0.3413

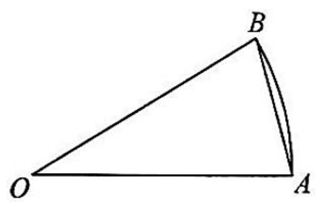
【答案】B

【解析】 $\Delta=4+4\xi<0$时$\xi<-1$，$\therefore \mu=-1$，$1=\mu+2\sigma$，$3=\mu+3\sigma$

$$\therefore P(1<\xi\leq 3)=\frac{P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)-P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)}{2}$$

$=\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$，选B.

7．如图是一个近似扇形的湖面，其中$OA=OB=r$，弧AB的长为$l(l<r)$．为了方便观光，欲在A，B两点之间修建一条笔直的走廊AB．若当$0<x<\frac{1}{2}$时，$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$，则$\frac{AB}{l}$的值约为



A. $2-\frac{r^2}{12l^2}$　　B. $2-\frac{l^2}{12r^2}$　　C. $1-\frac{r^2}{24l^2}$　　D. $1-\frac{l^2}{24r^2}$

【答案】D

【解析】 令 $\angle AOB=2x$ ，则 $l=2x\cdot r$ ，则 $x=\frac{l}{2r}$ ，

$AB^2=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cos 2x=(2r\sin x)^2=4r^2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2$ ，$AB=2r\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$

$\therefore \frac{AB}{l}=\frac{2r\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{2xr}=1-\frac{x^2}{6}=1-\frac{l^2}{24r^2}$ ，选 D

8．设 $a=e^{0.2}$，$b=\frac{5}{4}$，$c=\ln\frac{6e}{5}$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】C

【解析】法一： $x=0.2$ ，$a=e^x$ ，$b=\frac{1}{1-x}$ ，$c=1+\ln(1+x)$

令 $f(x)=e^x-\frac{1}{1-x}=e^x+\frac{1}{x-1}$ ，$f'(x)=e^x-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$

$g(x)=e^x(x-1)^2-1$ ，$g'(x)=e^x(x^2-2x+1+2x-2)=e^x(x^2-1)$

$0<x<1$ 时，$g'(x)<0,g(x)\searrow$ ，$g(x)<g(0)=0$ ，$f'(x)<0,f(x)\searrow$

$f(x)<f(0)=0$ ，$\therefore a<b$

令 $p(x)=e^x-(1+\ln(1+x))$ ，$p'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}\nearrow$ ，$p'(x)>p'(0)=0$

$\therefore p(x)$ 在 $(0,1)\nearrow$ ，$p(x)>p(0)=0$ ，$\therefore a>c$ ，$\therefore c<a<b$ ，选 C.

法二：秒杀

$1.2<e^{0.2}<\frac{1}{1-0.2}=\frac{5}{4}$，运用到（$1+x<e^x<\frac{1}{1-x},x\in(0,1)$）

$\ln\frac{6e}{5}=1+\ln\frac{6}{5}<1+\frac{6}{5}-1=1.2$，$\therefore c<a<b$，选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d<0$，且 $a_1^2=a_{11}^2$．$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，若 S_k 是 S_n 的最大值，则 k 的可能值为

A．5　　B．6　　C．10　　D．11

【答案】AB

【解析】$a_1^2=a_{11}^2$，$\therefore a_1+a_{11}=0$，$\therefore a_6=0$，$d<0$，$\therefore S_5=S_6$是$\{S_n\}$的最大值，选 AB.

10．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 a，b，c 成等比数列，则

A．B 的最小值为$\frac{\pi}{3}$　　B．$\cos(A-C)+\cos B=1-\cos 2B$

C．$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\sin B}$　　D．$\frac{b}{a}$的取值范围为$(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2})$

【答案】BC

【解析】a,b,c成等比数列，$b^2=ac$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geq\frac{1}{2}$

$\therefore 0<B\leq\frac{\pi}{3}$，$B_{\max}=\frac{\pi}{3}$，A 错

$\cos(A-C)+\cos B=\cos A\cos C+\sin A\sin C-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$

$=2\sin A\sin C=2\sin^2 B=1-\cos 2B$，B 对.

$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\sin A\cos C}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin^2 B}=\frac{1}{\sin B}$，C 对.

令$\frac{b}{a}=q$，则$\frac{c}{b}=q$，$\therefore b=aq,c=aq^2$，$\therefore\begin{cases}a+aq>aq^2\\a+aq^2>aq\\aq^2+aq>a\end{cases}$，

$\therefore\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，D 错.

11．已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$定义域均为**R**，若$f(-x)=-f(x)$，$f(x+2)=f(2-x)$对任意实数x都成立，则

A．函数$f(x)$是周期函数

B．函数$f'(x)$是偶函数

C．函数$f'(x)$的图象关于(2，0)中心对称

D．函数$f(2-x)$与$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称

【答案】ABC

【解析】$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow f(x)$关于原点对称

$f(2+x)=f(2-x)\Leftrightarrow f(x)$关于$x=2$对称，$f(x)$是周期为8的周期函数，A对.

$f(-x)=-f(x)$，$(f(-x))'=(-f(x))'=-f'(x)$，即$-f'(-x)=-f'(x)$，即$f'(-x)=f'(x)$，

即$f'(x)$为偶函数，B对.

$f(2+x)=f(2-x)$，$\therefore f'(2+x)=-f'(2-x)$，即$f'(2+x)+f'(2-x)=0$

$\therefore f'(x)$关于$(2,0)$对称，C对，选ABC.

$f(4-x)$与$f(x)$关于$x=2$对称，$f(2-x)$与$f(x)$不关于$x=2$对称，D错.

12．在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以8个顶点中的任意3个顶点作为顶点的三角形叫做K－三角形，12条棱中的任意2条叫做棱对，则

A．一个K－三角形在它是直角三角形的条件下，它又是等腰直角三角形的概率为$\frac{1}{3}$

B．一个K－三角形在它是等腰三角形的条件下，它又是等边三角形的概率为$\frac{1}{4}$

C．一组棱对中两条棱所在直线在互相平行的条件下，它们的距离为$\sqrt{2}$的概率为$\frac{1}{3}$

D．一组棱对中两条棱所在直线在互相垂直的条件下，它们异面的概率为$\frac{1}{2}$

【答案】BCD

【解析】方法一：正方体8个顶点中任选3个顶点连成三角形所得的三角形是等腰直角三角形只能在各个面上，在每一个面上能组成等腰直角三角形的有四个，$4\times6=24$，即24个等腰直角三角形.$C_8^3=56$，显然直角三角形不可能有72个，则A错.

对于B，等边三角形有：$\triangle D_1AC,\triangle D_1AB_1,\triangle A_1DB,\triangle A_1DC_1,\triangle B_1D_1C,\triangle B_1CA$，$\triangle C_1A_1B,\triangle C_1BD$共8个，$\therefore$等腰三角形共有32个，$P=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$，B对.

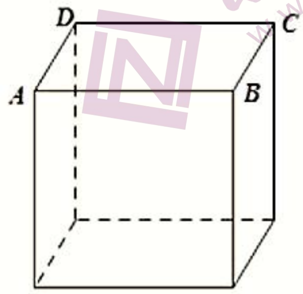
对于 C，相互平行的棱共有$3\cdot C_4^2=18$个结果，距离为$\sqrt{2}$的有$3\times2=6$个结果，$P=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$，C 对.

对于 D 中一组棱对中相互垂直的共有$C_{12}^2-18=48$个结果，共面的有$4\times4+4\times2=24$个结果，$P=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$，D 对.

方法二：

对于 A，直角三角形共有$6C_4^3+12\times2=48$，为等腰直角三角形的概率$P=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$，A 错.

对于 B，等腰三角形共有$C_8^3-12\times2=32$，为等边三角形的有8个，故又是等边三角形的概率$P=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$，B 正确.



对于 C，相互平行的棱有$3C_4^2=18$对，距离为$\sqrt{2}$的有6对，$P=\frac{1}{3}$，C 正确.

对于 D，相互垂直的棱有$12\times4=48$对，相互异面的有$12\times2=24$对，故$P=\frac{1}{2}$，D 正确.

选：BCD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．函数 $f(x)=\tan(\sin x)$的最小正周期为___________．

【答案】 2π

【解析】 $f(2\pi+x)=\tan\left[\sin(2\pi+x)\right]=\tan(\sin x)=f(x)$，$T=2\pi$.

14．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过点 A 作平面 A_1BD 的垂线，垂足为 H，则直线 AH 与平面 DCC_1D_1 所成角的正弦值为___________．

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】$\because AC_1 \perp$平面A_1BD，$\therefore AC_1$与平面CDD_1C_1所成角与AH与平面CDD_1C_1所成角相等，$\because AD \perp$平面DCC_1D_1，$\therefore \angle AC_1D$为AC_1与平面DCC_1D所成角，

$\sin \angle AC_1D = \dfrac{AD}{DC_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

15．在△ABC中，$2\sin\angle ACB=\sqrt{3}\sin\angle ABC$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC$边上的中线长为$\sqrt{13}$，则△$ABC$的面积为__________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】$2\sin\angle ACB = \sqrt{3}\sin\angle ABC$，$\therefore 2AB = \sqrt{3}AC$，则$AC = 4$

设BC中点为D，$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AD}^2 = \dfrac{1}{4}(12 + 16 + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot \cos A)$

$52 = 28 + 16\sqrt{3}\cos A$，$\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin A = \dfrac{1}{2}$，$S = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 4\times \dfrac{1}{2} = 2\sqrt{3}$.

16．将数列$\{3n\}$与$\{2^n\}$的所有项放在一起，按从小到大的顺序排列得到数列$\{a_n\}$，则a_{684}＝__________.

【答案】2022

【解析】$3\times 684 = 2052$，$2^{10} = 1024$，$2^{11} = 2048$，当等差数列算到$3\times(684-10) = 2022$（第674项）时，包含恰好$\{2^n\}$的前10项，$\therefore a_{684} = 2022$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 10 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，且 S_1，S_2，S_4 成等比数列．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{\dfrac{4}{a_na_{n+1}}\}$的前 n 项和 T_n．

【解析】

（1）等差数列$\{a_n\}$的公差为2，前n项和为S_n，则$S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = n^2 - n + na_1$，

因为S_1, S_2, S_4成等比数列，所以$S_2^2 = S_1S_4$，即$(2^2 - 2 + 2a_1)^2 = a_1(4^2 - 4 + 4a_1)$，

化为$(1+a_1)^2 = a_1(3+a_1)$，解得$a_1 = 1$.

所以$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

(2) $\dfrac{4}{a_na_{n+1}}=\dfrac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{a_ia_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i-\frac{1}{2}}-\frac{1}{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}=\frac{4n}{2n+1}.$$

18．(本小题满分 12 分)

已知两个变量 y 与 x 线性相关，某研究小组为得到其具体的线性关系进行了 10 次实验，得到 10 个样本点研究小组去掉了明显偏差较大的 2 个样本点，剩余的 8 个样本点$(x_i，y_i)(i=1，2，3，…，8)$满足 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=32$，$\sum\limits_{i=1}^{8}y_i=132$，根据这 8 个样本点求得的线性回归方程为$\hat{y}=3x+\hat{a}$(其中 $\hat{a}\in\mathbf{R}$)．后为稳妥起见，研究小组又增加了 2 次实验，得到 2 个偏差较小的样本点(2，11)，(6，22)，根据这 10 个样本点重新求得线性回归方程为$\hat{y}=\hat{n}x+\hat{m}$(其中 $\hat{n}$，$\hat{m}\in\mathbf{R}$)．

(1)求 $\hat{a}$ 的值；

(2)证明回归直线$\hat{y}=\hat{n}x+\hat{m}$ 经过点(4，16.5)，并指出 $\hat{n}$ 与 3 的大小关系．

参考公式：线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

【解析】

(1) 这8个样本点横坐标平均数 $\overline{x}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{8}\times32=4$，

纵坐标平均数 $\overline{y}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}y_i=\frac{1}{8}\times132=16.5$，则 $\hat{a}=\overline{y}-3\overline{x}=16.5-3\times4=4.5$.

(2) 样本点 $(2,11),(6,22)$ 分别记为 $(x_9,y_9),(x_{10},y_{10})$，

则这10个样本点横坐标平均数 $\overline{x}'=\frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=\frac{1}{10}\left[x_9+x_{10}+\sum\limits_{i=1}^{8}x_i\right]=\frac{1}{10}[2+6+32]=4$，

纵坐标平均数 $\overline{y}'=\frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=\frac{1}{10}\left[y_9+y_{10}+\sum\limits_{i=1}^{8}y_i\right]=\frac{1}{10}[11+22+132]=16.5$.

根据线性回归方程系数公式得，$m=\overline{y}'-n\overline{x}'=16.5-4n$，故 $y=nx+m$ 过点 $(4,16.5)$.

$\hat{n}<3$.

19．(本小题满分 12 分)

记函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$的最小正周期为 T．若$\frac{\pi}{3}<T<\frac{2\pi}{3}$，且 $y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称．

(1)求ω的值；

(2)将函数 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将得到的图象．上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$的图象，求 $g(x)$在$[\frac{\pi}{2}，0)$上的值域．

【解析】

（1）$f(x)=\frac{1-\cos 2\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x+\frac{1}{2}$，

所以$f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

因为函数图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，所以$\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以$\omega=2+3k,k\in\mathbf{Z}$，因为函数的最小正周期$T$满足$\frac{\pi}{3}<T<\frac{2\pi}{3}$，

所以$\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{2\omega}<\frac{2\pi}{3}$，解得$\frac{3}{2}<\omega<3$，所以$\omega=2$.

（2）由（1）得，$f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，所以$g(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以$2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$，

$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$上的值域为$\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

20．(本小题满分 12 分)

甲、乙两地教育部门到某师范大学实施“优才招聘计划”，即通过对毕业生进行笔试，面试，模拟课堂考核这 3 项程序后直接签约一批优秀毕业生，已知 3 项程序分别由 3 个考核组独立依次考核，当 3 项程序均通过后即可签约．去年，该校数学系 130 名毕业生参加甲地教育部门“优才招聘计划”的具体情况如下表(不存在通过 3 项程序考核放弃签约的情况)．

性别＼人数	参加考核但未能签约的人数	参加考核并能签约的人数
男生	45	15
女生	60	10

今年，该校数学系毕业生小明准备参加两地的“优才招聘计划”，假定他参加各程序的结果相互不影响，且他的辅导员作出较客观的估计：小明通过甲地的每项程序的概率均为$\frac{1}{2}$，通过乙地的各项程序的概率依次为$\frac{1}{3},\frac{3}{5}$，m，其中 $0<m<1$．

(1)判断是否有 90%的把握认为这 130 名毕业生去年参加甲地教育部门“优才招聘计划”能否签约与性别有关；

(2)若小明能与甲、乙两地签约分别记为事件 A，B，他通过甲、乙两地的程序的项数分别记为 X，Y．当 $E(X)>E(Y)$时，证明：$P(A)>P(B)$．

参考公式与临界值表：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k	2.706	3.841	5.024	6.635

【解析】

（1）因为$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{130\times(45\times10-60\times15)^2}{60\times70\times105\times25}$

$=\frac{117}{49}\approx2.388<2.706$，且$P(\chi^2\geq2.706)=0.10$，

所以没有90%的把握认为去年该校130名数学系毕业生参加甲地教育部门“优才招聘计划”能否签约与性别有关.

（2）因为小明参加各程序的结果相互不影响，

所以$X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，则$E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.$Y$的可能取值为$0,1,2,3$.

$P(Y=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(1-m)=\frac{4(1-m)}{15}$，

$P(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}(1-m)+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}(1-m)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}m=\frac{8-4m}{15}$，

$P(Y=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}(1-m)+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}m+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}m=\frac{3+5m}{15}$，

$P(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}m=\frac{m}{5}$.

随机变量Y的分布列：

Y	0	1	2	3
P	$\frac{4(1-m)}{15}$	$\frac{8-4m}{15}$	$\frac{3+5m}{15}$	$\frac{m}{5}$

$E(Y)=0\times\frac{4(1-m)}{15}+1\times\frac{8-4m}{15}+2\times\frac{3+5m}{15}+3\times\frac{m}{5}=\frac{14}{15}+m$.

因为$E(X)>E(Y)$，所以$\frac{3}{2}>\frac{14}{15}+m$，即$0<m<\frac{17}{30}$，

所以$P(A)-P(B)=P(X=3)-P(Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{m}{5}=\frac{5-8m}{40}>\frac{5-8\times\frac{17}{30}}{40}=\frac{14}{1200}>0$，

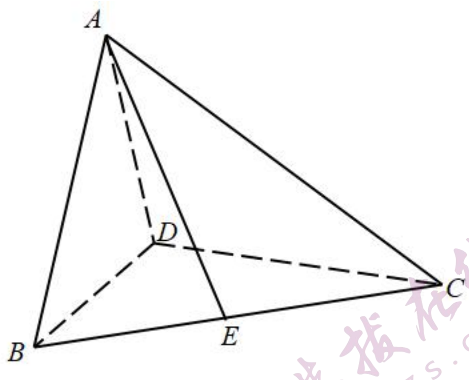
所以$P(A)>P(B)$.

21．(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知平面 $ABD\perp$平面 BCD，$AC\perp BD$，$CB=CD=\sqrt{5}$，$BD=2$，E 为 BC 的中点.

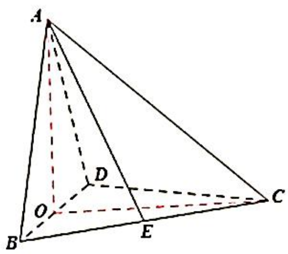
(1)若 $AD=\sqrt{2}$，求直线 BD 与 AE 所成角的余弦值；

(2)已知点 F 在线段 AC 上，且$AF=\frac{1}{3}AC$，求二面角 $F-DE-C$ 的大小.



【解析】

(1)取BD中点O，连结OA,OC，



因为$CB=CD=\sqrt{5}$，O为BD中点，所以$OC\perp BD$，

又因为平面$ABD\perp$平面BCD，平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，

$OC\subset$平面BCD，所以$OC\perp$平面ABD，又因为$OA\subset$平面ABD，

所以$OC\perp OA$，因为$OC\perp BD$，$AC\perp BD$，$OC\cap AC=C$，

$OC,AC\subset$平面OAC，所以$BD\perp$平面OAC，又因为$OA\subset$平面OAC，所以$BD\perp OA$.

$\triangle BCD$中，$BD\perp OC$，O为BD中点，$BD=2$，所以$OC=2$.

$\triangle ABD$中，$BD\perp OA$，O为BD中点，$BD=2$，$AD=\sqrt{2}$，所以$OA=1$.

以OB,OC,OA为坐标轴，建立平面直角坐标系$O-xyz$，

则$A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$C(0,2,0)$，所以$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，

所以$\overrightarrow{BD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$，

所以直线BD与AE所成角的余弦值为$\left|\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AE}|}\right|=\frac{|-1|}{2\times\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}=\frac{1}{3}$.

（2）设$OA=a$，则$A(0,0,a)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$F\left(0,\frac{2}{3},\frac{2a}{3}\right)$，

则$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{3}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(1,\frac{2}{3},\frac{2a}{3}\right)$，

设平面FDE法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$所以$\begin{cases}\frac{3}{2}x+y=0\\x+\frac{2}{3}y+\frac{2a}{3}z=0\end{cases}$

取$x=2,y=-3,z=0$，得到平面FDE的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(2,-3,0)$，

又因为平面DEC的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，可得平面$FDE\perp$平面$DEC$，

所以二面角$F-DE-C$的大小为$\frac{\pi}{2}$.

22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax$，$g(x)=ax-\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线与 $g(x)$在 $x=1$ 处的切线相同，求实数 a 的值；

(2)令 $F(x)=f(x)+g(x)$，直线 $y=m$ 与函数 $F(x)$的图象有两个不同的交点，交点横坐标分别为 x_1，x_2，证明：$x_1+x_2>1$.

【解析】

（1）$f'(x)=e^x-a, f'(0)=1-a$. $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}$ ，$g'(1)=a-1$ ，$1-a=a-1, a=1$.

检验 $a=1$ 时两个函数切线方程都是 $y=1$.

（2）**方法一**：$F(x)=e^x-\ln x, x>0$ ，令 $G(x)=F'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ ，则 $G'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$ ，

$\therefore F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$F'\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$ ，$F'(1)=e-1>0$ ，

因为函数 $y=F(x)$ 连续不间断，所以存在唯一实数 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ ，

$F'(x_0)=0, e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ ，从而 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，$(x_0,+\infty)$ 递增.

不妨设 $0<x_1<x_0<x_2$ ，则 $F(x_1)=F(x_2)=m$ ，

当 $x_2\ge 2x_0$ 时，$x_1+x_2\ge 2x_0>1$.

当 $0<x_1<x_0<x_2<2x_0$ ，则 $x_1, 2x_0-x_2\in(0,x_0)$ ，$F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

$F(x_1)-F(2x_0-x_2)=F(x_2)-F(2x_0-x_2)=e^{x_2}-\ln x_2-e^{2x_0-x_2}+\ln(2x_0-x_2)$ ，

令 $g(x)=e^x-\ln x-e^{2x_0-x}+\ln(2x_0-x), x\in(x_0,2x_0)$ ，

令 $h(x)=g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+e^{2x_0-x}-\dfrac{1}{2x_0-x}$ ，$h'(x)=e^x-e^{2x_0-x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(2x_0-x)^2}$ ，

令 $t(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$ ，$h'(x)=t(x)-t(2x_0-x)$ ，$t'(x)=e^x-\dfrac{2}{x^3}<0$ ，

$x\in(0,x_0)$ ，$t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

因为 $x>2x_0-x>0$ ，$t(x)<t(2x_0-x)$ ，$h'(x)<0, g'(x)$ 在 $(x_0,2x_0)$ 递减，

$g'(x)<g'(x_0)=2\left(e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\right)=0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(x_0,2x_0)$ 递减，所以 $g(x)<g(x_0)=0$ ，

即 $F(x_1)-F(2x_0-x_2)=F(x_2)-F(2x_0-x_2)<0$ ，即 $F(x_1)<F(2x_0-x_2)$ ，

因为$x_1, 2x_0 - x_2 \in (0, x_0)$，$F(x)$在$(0, x_0)$递减，

所以$x_1 > 2x_0 - x_2$，所以$x_1 + x_2 > 2x_0 > 1$.

综上可得，$x_1 + x_2 > 1$.