2023届高三年级苏州八校联盟第二次适应性检测
数学参考答案及评分标准

2022.12

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	A	D	D	D	C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，选错或不答的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	ABD	AD	ABD	BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.试题中包含两个空的，第一个空2分，第二个空3分，全部答对的给5分.

13. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　　14. $\dfrac{1}{4}$　　15. $[\dfrac{\ln 3}{5},\dfrac{\ln 2}{2})$　　16. 11；$a-1$

四、解答题：本题共6小题，共70分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.解：（1）由条件得$\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}=3$为首项，公差$d=2$的等差数列.　……………………2分

故$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\times 2=2n+1$，即$a_n=\dfrac{1}{2n+1}$.　……………………4分

（2）由（1）知$a_na_{n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right]$，　……………………6分

故$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_ka_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$，　……………………8分

所以$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2k+3}\right)<\dfrac{1}{7}$，解得$k<9$，结合$k\in N^*$得，$k$的最大值是8.　……………………10分

18.解：（1）$\because$ $\odot C$与直线$2x-y=0$相切于点$(0,0)$，

$\therefore$圆心C必在过$(0,0)$且与$2x-y=0$垂直的直线上，

即C在直线$x+2y=0$上，　……………………………………………………2分

又C在$x+y-1=0$上，

$\therefore$由$\begin{cases}x+2y=0\\x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow C(2,-1)$　……………………………………………………4分

$\therefore\odot C$的半径$r=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \odot C$的方程为：$(x-2)^2+(y+1)^2=5$ ……………………………………………6 分

(2) 由 (1) 知：$\odot C$的方程为：$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

若直线 l 的斜率不存在时，即 l 的方程为 $x=3$，C 到 l 的距离为 1，此时 l 截圆的弦长为 4 满足；…8 分

若直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y+3=k(x-3)$ 即 $kx-y-3k-3=0$，

$\because$ 点 C 到 l 的距离为 $\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，$\therefore$ 由 $\left(\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+4=5$ 解得 $k=-\dfrac{3}{4}$， ………………………11 分

$\therefore l$ 的方程为 $3x+4y+3=0$，

综上，所求直线 l 的方程为：$x=3$ 或 $3x+4y+3=0$ ……………………………………………………12 分

19.解：(1) 选择①：设 $b=2x$，则 $AD=DC=x$，

在?ABD 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{x^2+\dfrac{112}{9}-16}{\dfrac{8}{3}\sqrt{7}x}$， ……………………………………………………2 分

在?BCD 中，$\cos\angle CDB=\dfrac{x^2+\dfrac{112}{9}-\dfrac{112}{9}}{\dfrac{8}{3}\sqrt{7}x}=\dfrac{x^2}{\dfrac{8}{3}\sqrt{7}x}$， ……………………………………………4 分

$\because \angle ADB+\angle CDB=\pi$，$\therefore \cos\angle ADB+\cos\angle CDB=0$，

即 $\dfrac{x^2+\dfrac{112}{9}-16}{\dfrac{8}{3}\sqrt{7}x}+\dfrac{x^2}{\dfrac{8}{3}\sqrt{7}x}=0$，所以 $x=\dfrac{4}{3}$，故 $b=\dfrac{8}{3}$． ……………………………………6 分

选择②：由正弦定理得，$\sin A\sin B=\sin B\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B>0$，$\therefore \sin A=\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

即 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A$，于是 $\tan A=\sqrt{3}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$， ………………………………2 分

设 $b=2x$，$c=y$，

在?ABD 中，$\cos A=\dfrac{x^2+y^2-\dfrac{112}{9}}{2xy}=\dfrac{1}{2}$，即 $x^2+y^2-xy=\dfrac{112}{9}$，①

在?ABC 中，$\cos A=\dfrac{4x^2+y^2-\dfrac{112}{9}}{4xy}=\dfrac{1}{2}$，即 $4x^2+y^2-2xy=\dfrac{112}{9}$，②……………………4 分

联立①②得，$x=\dfrac{4}{3}$，$y=4$，即 $c=4$，$b=\dfrac{8}{3}$． ……………………………………………6 分

(2) 由题意得，$S_{?ABE}+S_{?ACE}=S_{?ABC}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times4\times AE\times\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times AE\times\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{8}{3}\times\sin60^\circ$，$\therefore AE=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$， …………8 分

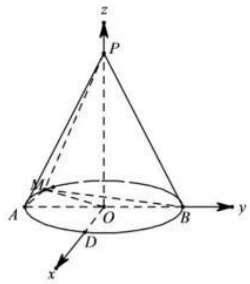
又$\because \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore BE=\dfrac{4\sqrt{7}}{5}$， ……………………………………………10 分

$\therefore C_{\triangle ABE}=4+\dfrac{8\sqrt{3}+4\sqrt{7}}{5}$，故$\triangle ABE$的周长为$4+\dfrac{8\sqrt{3}+4\sqrt{7}}{5}$. …………………………12 分

20.解：（1）$\because O$、N分别是AB与BP的中点，$\therefore ON//AP$

又$ON\not\subset$平面PAM，$AP\subset$平面PAM，$\therefore ON//$平面PAM …………………………4 分

（2）不妨设$OA=1$，作$OD\perp AB$交$\overset{\frown}{AB}$于D点，分别以OB，OD，OP为x轴，y轴和 z轴建立如图所示的空间直角坐标系，………5 分



设$M(\cos\theta,\sin\theta,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(-1,0,1)$，$B(1,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(-1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PM}=(\cos\theta,\sin\theta,-\sqrt{3})$， ………7 分

分别设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面PAM和平面PBM的一个法向量，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{PM}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$且$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$且$\begin{cases}x_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ x_2\cos\theta+y_2\sin\theta-\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ ……………………………………9 分

令$z_1=-1$，$z_2=1$，可得$\vec{m}=\left(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta},-1\right)$，$\vec{n}=\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta},1\right)$， ……………………11 分

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-1}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\neq 0$，

所以不存在点M，可使二面角$A-PM-B$的大小为90° ……………………………………………12 分

21.解：（1）由题意，得$\begin{cases}e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\end{cases}$ 解得$a^2=4,b^2=3$，所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …2 分

（2）由（1）可得$F_1(-1,0)$，若直线l_1的斜率为 0,

则l_2的方程为$x=-1$与直线$x=1$无交点，不满足条件. ………………………………………………4 分

设直线$l_1:x=my-1$，若$m=0$，则$\lambda=1$，则不满足$\overline{QA}=\lambda\overline{QB}$，所以$m\neq 0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ x=my-1\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$， ……………………………………………6 分

因为$\begin{cases}\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}\\\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}\end{cases}$即$\begin{cases}(-1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2+1,y_2)\\(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)\end{cases}$

则$-y_1=\lambda y_2, y_1-y_0=\lambda(y_2-y_0)$

所以$\lambda=-\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{y_1-y_0}{y_2-y_0}$，解得$y_0=\dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{3}{m}$.于是$|F_1Q|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{3}{|m|}$ ……………………………8 分

直线l_2的方程为：$x=-\dfrac{1}{m}y-1$，

联立$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{m}y-1\\x=1\end{cases}$解得$P(1,-2m)$，所以$|PF_1|=2\sqrt{1+m^2}$ ……………………………………………10 分

所以$S_{\triangle PQF_1}=\dfrac{1}{2}|F_1Q|\cdot|PF_1|=\dfrac{3(1+m^2)}{|m|}=3\left(|m|+\dfrac{1}{|m|}\right)\geq 6$，

当且仅当$m=\pm1$时，$(S_{\triangle PQF_1})_{\min}=6$. ……………………………………………………12 分

22.解：(1) $\because f(x)=(x+1)\ln x+(a-2)x+2$，

$\therefore f'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{x}+a-2=\ln x+\dfrac{1}{x}+a-1$

$\therefore f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$ ……………………………………………………1 分

$\therefore$当$x\in(0,1)$时，$f''(x)<0$, $f'(x)$在$(0,1)$内单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$时，$f''(x)>0$, $f'(x)$在$(1,+\infty)$内单调递增，

$\therefore f'(x)\geq f'(1)=a\geq0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，……………………………………………………3 分

$\because f(1)=a$，

$\therefore$当$a=0$时，$f(x)$存在唯一零点$x_0=1$；

当$a>0$时，$f(1)=a>0$，取$m=e^{-a-2}<1$，

$$\begin{aligned}f(m)&=(m+1)\ln m+(a-2)m+2=m\ln m+\ln m+am-2m+2\\&<\ln m+a+2=\ln e^{-a-2}+a+2=0,\end{aligned}$$

所以，由零点存在性定理可知：$\exists x_0\in(m,1)$,使得$f(x_0)=0$.

综上，$f(x)$存在唯一零点x_0. ……………………………………………………5 分

(2) 由(1)中可知：$f(x_0)=(x_0+1)\ln x_0+(a-2)x_0+2=0, x_0\leq1$，

$\therefore a=\dfrac{-(x_0+1)\ln x_0-2}{x_0}+2$，

$\because x_1+a=\sin x_1, \therefore a=\sin x_1-x_1$，

$\therefore \dfrac{-(x_0+1)\ln x_0-2}{x_0}+2=\sin x_1-x_1$，

令$t=\ln x_0, \therefore x_0=e^t, t\le 0$，

$\therefore \dfrac{-(e^t+1)t-2}{e^t}+2=\sin x_1-x_1$ ……………………………………………………7 分

下证：$t\ge x_1$

设$F(x)=\sin x-x, \therefore F'(x)=\cos x-1\le 0, \therefore F(x)$在$R$上单调递减

又$F(0)=0, \therefore$ 当$x\le 0$时，$F(x)\ge 0, \therefore x_1\le 0$

设$G(x)=-\dfrac{(e^x+1)x+2}{e^x}+2=-x-\dfrac{x+2}{e^x}+2, x\le 0$

$\therefore G'(x)=e^{-x}(x+1)-1, G''(x)=-xe^{-x}\ge 0$

$\therefore G'(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增

$\therefore G'(x)\le G'(0)=0$， $\therefore G(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减 ……………………………………………………9 分

再设$H(x)=G(x)-F(x)=-\dfrac{x+2}{e^x}+2-\sin x, x\le 0$

$\therefore H'(x)=e^{-x}(x+1)-\cos x$

$\therefore H''(x)=-xe^{-x}+\sin x\ge x-xe^{-x}=x(1-e^{-x})\ge 0$

$\therefore H'(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增

$\therefore H'(x)\le H'(0)=0$， $\therefore H(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减

$\therefore H(x)\ge H(0)=0, \therefore G(x)\ge F(x)$, 当$x=0$时取“$=$” ……………………………………………………11 分

综上，$F(x)$与$G(x)$在$(-\infty,0]$上都单调递减，且$G(x)\ge F(x), G(0)=F(0)=0, G(t)=F(x_1)$

$\therefore t\ge x_1$, 即$x_1-\ln x_0\le 0$得证. …………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。