苏州市 2021－2022 学年第一学期学业质量阳光指标调研卷

高三数学

2022.01

一、单选题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分.每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.

1. 设 i 为虚数单位,若复数 $(1-\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})$ 是纯虚数,则实数 a 的值为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】$(1-\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})=1+a+(a-1)\mathrm{i}$, 则 $\begin{cases}1+a=0\\a-1\neq0\end{cases}\Rightarrow a=-1$, 故选 A

2. 设集合 $A=\{x\in N^*|1<\log_2 x<3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$,则集合 $A\cup B$ 的元素个数为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【答案】B

【解析】$A=\{x\in N^*|1<\log_2 x<3\}=\{3,4,5,6,7\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, 所以 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, 故选 B

3. 已知圆锥的高为 $\sqrt{6}$,其侧面展开图为一个半圆,则该圆锥的母线长为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】设圆锥的母线为 l,底面半径为 r, 则 $\frac{2\pi r}{l}=\pi\Rightarrow l=2r$, 又 $r^2+\sqrt{6}^2=l^2$,解得 $l^2=8\Rightarrow l=2\sqrt{2}$, 故选 A

4. 在 ΔABC 中, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,点 P 在边 BC 上,则“$AP=\frac{1}{2}BC$”是“P 为 BC 中点”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】显然选 B

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $\frac{S_3}{S_3+S_6}=\frac{1}{5}$,则 $\frac{a_3}{a_3+a_6}=$

A. $\frac{2}{15}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{5}{16}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】$\frac{S_3}{S_3+S_6}=\frac{1}{5}\Rightarrow 4S_3=S_6\Rightarrow 4(3a_1+3d)=6a_1+15d\Rightarrow d=2a_1$, $\therefore \frac{a_3}{a_3+a_6}=\frac{a_1+2d}{a_1+2d+a_1+5d}=\frac{5a_1}{16a_1}=\frac{5}{16}$, 故选 C

6. 北京时间 2021 年 10 月 16 日 0 时 23 分,神舟十三号载人飞船在酒泉卫星发射中心成功发射,受到国际舆论的高度关注.为弘扬航天精神、普及航天知识、激发全校学生为国争光的荣誉感和责任感,某校决定举行以“传航天精神、铸飞天梦想”为主题的知识竞赛活动.现有 A, B 两队均由两名高一学生和两名高二学生组成.比赛共进行三轮,每轮比赛两队都随机挑选两名成员参加答题,若每位成员被选中的机会均等,则第三轮比赛中被两队选中的四位学生不全来自同一年级的概率是

A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{17}{18}$　　D. $\frac{35}{36}$

【答案】C

【解析】若两队队员都来自高一年级，则概率为$\frac{1}{C_4^2}\times\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{36}$，同理都来自高二的概率也为$\frac{1}{36}$，所以不全来自同一年级的概率为$1-\frac{1}{36}\times 2=\frac{17}{18}$，故选C

7. 已知$a>b+1>1$，则下列不等式一定成立的是

A. $|b-a|>b$　　B. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　C. $\frac{b+1}{a-1}<\frac{e^b}{\ln a}$　　D. $a+\ln b<b+\ln a$

【答案】C

【解析】对于A，令$a=4,b=2$，则A不成立，

对于B，令$a=2,b=\frac{1}{2}$，则B不成立，

对于C，$\frac{b+1}{a-1}<\frac{e^b}{\ln a}\Rightarrow\frac{\ln a}{a-1}<\frac{e^b}{b+1}$，因为$0<\ln a<a-1(a>1),e^b>b+1>1(b>0)$，

$\therefore\frac{\ln a}{a-1}<1<\frac{e^b}{b+1}$，所以C正确

对于D，令$a=e,b=\frac{1}{e}$，则D不成立，

故选C

8. 若斜率为$k(k>0)$的直线l与抛物线$y^2=4x$和圆$M:(x-5)^2+y^2=9$分别交于A,B和C,D两点，切$AC=BD$，则当ΔMCD面积最大时k的值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

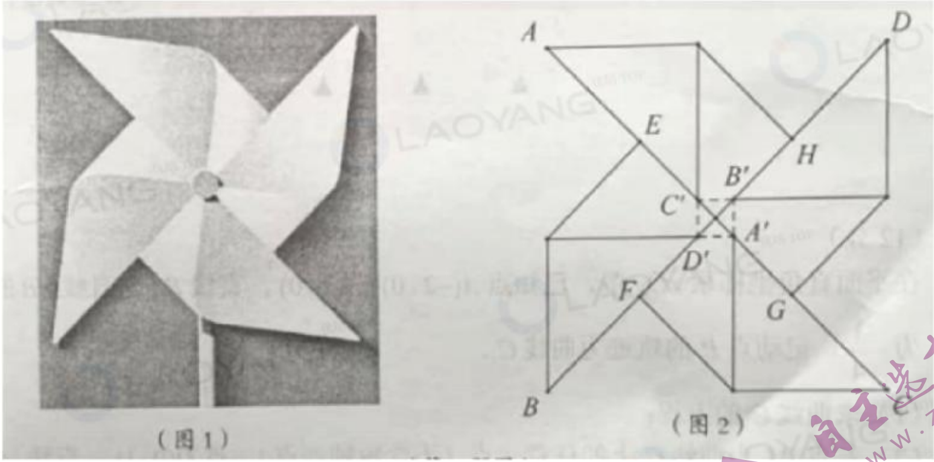
【解析】设CD中点为N(x_0,y_0)，因为AC=BD，故点N为AB中点，由点差法可知直线l的斜率$k=\frac{p}{y_0}=\frac{2}{y_0}>0$，由圆的几何性质可知$k=-\frac{1}{k_{MN}}=\frac{5-x_0}{y_0}$，所以$\frac{2}{y_0}=\frac{5-x_0}{y_0}\Rightarrow x_0=3$，

即点N$(3,y_0)$

设$d=MN=\sqrt{(x_0-5)^2+y_0^2}=\sqrt{y_0^2+4}\in(2,3)$，则弦长CD=$2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{9-d^2}$，所以$\Delta MCD$的面积为S=$\frac{1}{2}CD\times d=\sqrt{9-d^2}\cdot d\le\frac{9-d^2+d^2}{2}=\frac{9}{2}$，当且仅当$9-d^2=d^2$，即$d^2=\frac{9}{2}$时，$\Delta MCD$面积最大，即$y_0^2+4=\frac{9}{2}\Rightarrow y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以此时$k=\frac{p}{y_0}=2\sqrt{2}$，故选D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共计20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 折纸发源于中国.19世纪，折纸传入欧洲，与自然科学结合在一起称为建筑学院的教具，并发展成为现代几何学的一个分支.我国传统的一种手工折纸风车(如图1)是从正方形纸片的一个直角顶点开始，沿对角线部分剪开成两个角，将其中一个角折叠使其顶点仍落在该对角线上，同样操作其余三个直角制作而成的，其平面图如图2，则



（图 1）　　（图 2）

A. $\overrightarrow{EH}\parallel\overrightarrow{FC}$　　B. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BE}=0$　　C. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}$　　D. $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

【答案】BCD

【解析】由中心选择对应线的夹角不变，可知 $\overrightarrow{EH}/\!/\overrightarrow{FG}$, $<AH,BE>=<AC,BD>=\frac{\pi}{2}$，故 A 错，B 正确；取正方形中心为 O，易知 $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EG}$，C 正确；由向量的投影算法可知 D 正确，综上所述正确答案为 BCD

10. 下列命题正确的是

A. 若 z_1, z_2 为复数，则 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$　　B. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 为向量，则 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

C. 若 z_1, z_2 为复数，且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $z_1z_2=0$

D. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 为向量，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

【答案】AD

【解析】易知 A 正确，B 错．$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0\Leftrightarrow re(z_1\overline{z_2})=0$，$C$ 错，故 D 正确。综上所述正确答案为 AD

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+1$，则

A. $\forall a\in R$，函数 $f(x)$ 在 R 上均有极值　　B. $\exists a\in R$，使得函数 $f(x)$ 在 R 上无极值

C. $\forall a\in R$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有且仅有一个零点

D. $\exists a\in R$，使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有两个零点

【答案】BC

【解析】$f'(x)=x^2+ax$，$a=0$ 时，$f(x)$ 无极值，故 A 错，B 正确；参变分离判断零点 $-\frac{1}{2}a=\frac{x}{3}+\frac{1}{x^2}$

$x<0$ 时，因为 $(\frac{x}{3}+\frac{1}{x^2})\nearrow$，故 D 错 $\Rightarrow$ C 正确．综上所述：BC 正确

12. 甲同学投掷骰子 5 次，并请乙同学将向上的点数记录下来，计算出平均数和方差．由于记录遗失，乙同学只记得这五个点数的平均数为 2，方差在区间 [1.2,2.4] 内，则这五个点数

A. 众数可能为 1　　B. 中位数可能为 3　　C. 一定不会出现 6　　D. 出现 2 的次数不超过两次

【答案】ACD

【解析】：$\sum_{i=1}^{5}x_i=10$，方差 $\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-2)^2}{5}\in[1.2,2.4]$，当实际记录数据 $\{1,1,1,3,4\}$ 时满足情形，故 A 正确；我

们把 x_i 从小到大排，$\sum_{i=1}^{5}x_i=10\geqslant 3x_3+2\Rightarrow x_3<3$，故 B 错误；

若出现6，则 $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-2)^2}{5}>3.2>2.4$，矛盾，故 C 正确；

若出现2的次数超过2次，$\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-2)^2}{5}\leqslant\frac{2}{5}<1.2$，故 D 正确

综上所述：ACD 正确

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，写出一个同时满足①②的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：$a_n=$ ______

① $\{a_n\}$ 是递增的等比数列；② $T_3=T_6$.

【答案】2^{n-5}

【解析】因为 $T_3=T_6$，所以 $a_4a_5a_6=1\Rightarrow a_5=1$，故可取 $q=2$，则 $a_1=\dfrac{1}{16}$，则 $a_n=2^{n-5}$，答案不唯一，只需让 $a_5=1$ 即可

14. 设点 P 是曲线 $y=\sqrt{x}-\dfrac{3}{2}\ln x$ 上的任意一点，则 P 到直线 $y=-x$ 的最小距离是.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】设 $P\left(x_0,\sqrt{x_0}-\dfrac{3}{2}\ln x_0\right)$，则点P到直线 $x+y=0$ 的距离 $d=\dfrac{\left|x_0+\sqrt{x_0}-\dfrac{3}{2}\ln x_0\right|}{\sqrt{2}}$，令 $f(x)=x+\sqrt{x}-\dfrac{3}{2}\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2x}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+3)}{2x}=0\Rightarrow x=1$，易知当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(1)=2$，所以 d 的最小值为 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

15. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点，若点 F_2 关于双曲线 C 的渐近线的对称点 E 在 C 上，则双曲线 C 的离心率为 ______

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】设直线 EF_2 与渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 交于点M，由题意可知点M为 EF_2 中点，且 $OM\perp EF_2$，OM为 $\triangle EF_1F_2$ 中位线，所以 $EF_2=2MF_2=2b$，$EF_1=2OM=2a$，因为点E在双曲线上，所以 $EF_2-EF_1=2b-2a=2a\Rightarrow\dfrac{b}{a}=2$，所以双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$

16. 已知直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=BB_1=2$，D,E 分别为棱 A_1C_1，AB 的中点，过点 B_1,D,E 作平面 α 将此三棱柱分为两部分，其体积分别记为 V_1，$V_2(V_1<V_2)$，则 $V_2=$ ______；平面 α 截此三棱柱的外接球的截面面积为 ______.

【答案】$\dfrac{7}{6}$；$\dfrac{26\pi}{3}$

【解析】设 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，可得：$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle A_1B_1D}=1$，故 $V_1=\frac{1}{3}\times2\times(1+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}})=\frac{7}{6}$

$V_2=4-\frac{7}{6}=\frac{17}{6}$. 设 AC_1 与 A_1C 的交点为O，O即为球心，半径为 $\sqrt{3}$，过 O 在平面 AA_1C_1C 上做FD的距离 $d=\frac{1}{3}\Rightarrow$ 截面圆半径为 $\sqrt{3-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{26}}{3}$，故面积为 $\frac{26\pi}{9}$

四、解答题：本题共6小题，共计70分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10分)

在① $MC=2MB$;② $\sin C=\frac{\sqrt{21}}{14}$ ③ $S_{\triangle ABM}=\sqrt{3}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题(2)的横线上，并解答下列题目.

在 $\triangle ABC$ 中，已知角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=2\sqrt{7}$, $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$.

(1) 求 A;

(2) 若 M 为边 AC 上一点，且 $\angle ABM=\angle BAC$，____________，求 $\triangle ABC$ 的面积.

(注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分)

【解析】解：(1) 由 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$，得 $b\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=b\cos\frac{A}{2}=a\sin B$，

由正弦定理得 $b\cos\frac{A}{2}=b\sin A=2b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

因为 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 选①，设 $BM=x$, $CM=2x$，因为 $\angle ABM=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BMC=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理得 $x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=(2\sqrt{7})^2$，

解得 $x=2$.

所以 $AC=6$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.

选②，因为 $\angle ABM=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BMC=\frac{2\pi}{3}$，

由正弦定理得 $\frac{BM}{\frac{\sqrt{21}}{14}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，

解得 $BM=2$，

由余弦定理得 $2^2+MC^2-2\cdot 2\cdot MC\cos\frac{2\pi}{3}=(2\sqrt{7})^2$，解得 $MC=4$.

所以 $AC=6$.所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.

选③，因为 $\angle ABM=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BMC=\frac{2\pi}{3}$.

由 $S_{\triangle ASM}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}$，解得 $AB=2$，所以 $BM=2$.

由余弦定理得 $2^2+MC^2-2\cdot 2\cdot MC\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=(2\sqrt{7})^2$，解得 $MC=4$

所以 $AC=6$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.

18.(12分)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m}=a_n+d$($m\in N^*$, d 是不等于0的常数)对任意 $n\in N^*$ 恒成立，则称 $\{a_n\}$ 是周期为 m，周期公差为 d 的"类周期等差数列".已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=4n+1$($n\in N^*$).

(1) 求证：$\{a_n\}$ 是周期为2的"类周期等差数列"，并求 a_2, a_{2022} 的值;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}-a_n$($n\in N^*$)，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】(1) 法一，由 $a_n+a_{n-1}=4n+1$, $a_{n+1}+a_{n+2}=4(n+1)+1$，相减得 $a_{n+2}-a_n=4$($n\in N^*$).

所以 $\{a_n\}$ 是周期为 2,周期公差为 4 的"类周期等差数列",

由 $a_1+a_2=5, a_1=1$,得 $a_2=4$,所以 $a_{2022}=a_2+(2022-2)\times 2=4+4040=4044$.

法二:由 $a_n+a_{n+1}=4n+1, a_{n+1}+a_{n+2}=4(n+1)+1$,相减得 $a_{n+2}-a_n=4(n\in \mathbf{N}^*)$.所以 $\{a_n\}$ 是周期为 2,周期公差为 4 的"类周期等差数列",

从而 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别是公差为 4 的等差数列,

所以 $a_n=\begin{cases}2n-1, n\text{ 为奇数},\\ 2n, n\text{ 为偶数}\end{cases}$

所以 $a_{2022}=2022\times 2=4044$.

(2) 法一:由 $b_n=a_{n+1}-a_n, b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$,得 $b_{n+1}+b_n=a_{n+2}-a_n=4$,

当 n 为偶数时,$T_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=4\cdot\frac{n}{2}=2n$;

当 n 为奇数时,$T_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=3+4\cdot\frac{n-1}{2}=2n+1$.

综上所述,$T_n=\begin{cases}2n+1, n\text{ 为奇数},\\ 2n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

法二:当 n 为偶数时,$b_n=a_{n+1}-a_n=2(n+1)-1-2n=1$;

当 n 为奇数时,$b_n=a_{n+1}-a_n=2(n+1)-(2n-1)=3$.

所以当 n 为偶数时,$T_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=4\cdot\frac{n}{2}=2n$;

当 n 为奇数时,$T_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=3+4\cdot\frac{n-1}{2}=2n+1$

综上所述,$T_n=\begin{cases}2n+1, n\text{ 为奇数},\\ 2n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

19. (12 分)

2021 年 8 月国务院印发《全民健身计划 2021－2025》,《计划》中提出了各方面的主要任务,包括加大全民健身场地设施供给、广泛开展全民健身赛事活动、提升科学健身指导服务水平、激发体育社会组织活动、促进重点人群健身活动开展和营造全民健身社会氛围等.在各种健身的方式中,瑜伽逐渐成为一种新型的热门健身运动.某瑜伽馆在 9 月份随机采访了 100 名市民,对于是否愿意把瑜伽作为主要的健身方式作了调查.

	愿意	不愿意	合计
男性	25	25	50
女性	40	10	50
合计	65	35	100

(1) 能否在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为"愿意把瑜伽作为主要健身方式"与性别有关?

附:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2>k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

(2) 为了推广全民健身,某市文化馆计划联合该瑜伽馆举办"瑜你一起"的公益活动,在全市范围内开设一期公益瑜伽课,先从上述参与调查的 100 人中选择"愿意"的人按分层抽样抽出 13 人,再从 13 人中随机抽取 2 人免费参加.市文化馆拨给瑜伽馆一定的经费补贴,补贴方案为:男性每人 1000 元,女性每人

500元.求补贴金额的分布列及数学期望(四舍五入精确到元).

【解析】$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100(10\times25-40\times25)^2}{65\times35\times50\times50}=\dfrac{900}{91}>6.635.$

所以能在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为"愿意把瑜伽作为主要健身方式"与性别有关

(2) 调查的100人中选择"愿意"的人按分层抽样抽出13人，

其中男性人数为$\dfrac{25}{25+40}\times13=5$,女性人数为$\dfrac{40}{25+40}\times13=8$.

记补贴金额为X,则X可能为1000, 1500, 2000.

$P(X=1000)=\dfrac{C_8^2}{C_{13}^2}=\dfrac{14}{39}$, $P(X=1500)=\dfrac{C_5^1C_8^1}{C_{13}^2}=\dfrac{20}{39}$, $P(X=2000)=\dfrac{C_5^2}{C_{13}^2}=\dfrac{5}{39}$.

则X的分布列为

X	1000	1500	2000
P	$\dfrac{14}{39}$	$\dfrac{20}{39}$	$\dfrac{5}{39}$

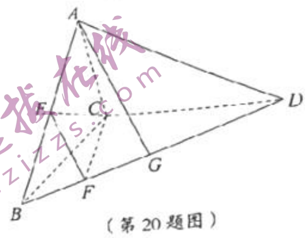
数学期望$E(X)=1000\times\dfrac{14}{39}+1500\times\dfrac{20}{39}+2000\times\dfrac{5}{39}=\dfrac{18000}{13}\approx1385$(元).

20. (12分)

如图,在四面体$ABCD$中,已知$\triangle ABD$是边长为2的等边三角形,$\triangle BCD$是以点C为直角顶点的等腰直角三角形,E为线段AB的中点,G为线段BD的中点,F为线段BD上的点.

(1) 若AG∥平面CEF,求线段CF的长;

(2) 若二面角$A-BD-C$的大小为30°,求CE与平面ABD所成角的大小.



(第20题图)

【解析】(1) 因为AG∥面CEF, $AG\subset$面ABD,面$CEF\cap$平面$ABD=EF$,

所以AG∥EF.

又因为E为线段AB的中点,所以F为线段BG的中点,

因为G为线段BD的中点,且$BD=2$,所以$GF=\dfrac{1}{2}$.

因为$\triangle BCD$是以点C为直角顶点的等腰直角三角形,所以$CG=\dfrac{1}{2}BD=1$.

在直角$\triangle CGF$中,$CF=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt5}{2}$.

(2) 法一:连接CG,因为在等边$\triangle ABD$中,G为BD的中点,所以$AG\perp BD$.又因为$\triangle BCD$是以点C为直角顶点的等腰直角三角形,G为线段BD的中点,

所以$CG\perp BD$,所以$\angle AGC$为二面角$A-BD-C$的平面角,

所以$\angle AGC=30^\circ$.过点C作$CM\perp AG$,垂足为M,连接EM.

因为$AG\perp BD$, $CG\perp BD$, $CG\cap AG=G$, CG, $AG\subset$面ACG,所以$BD\perp$面ACG.

又因为$CM\subset$面ACG,所以$BD\perp CM$.

又因为$BD\cap AG=G$, BD, $AG\subset$面ABD,所以$CM\perp$面ABD,

所以$\angle CEM$为CE与面ABD所成的角.

因为$\angle AGC=30^\circ$, $CG=1$,为以$CM=\dfrac{1}{2}$, $MG=\dfrac{\sqrt3}{2}$,

因为$AG=\sqrt3$,所以M为线段AG的中点,

麻以EM∥BG,且$EM=\dfrac{1}{2}$,所以$\angle CEM=45^\circ$,

所以CE与面ABD所成角的大小为45°.

法二:连接CG.因为在等边$\triangle ABD$中,G为BD的中点,所以$AG\perp BD$.

又因为$\triangle BCD$是以点C为直角顶点的等腰直角三角形，G为线段BD中点，所以$CG\perp BD$，所以$\angle AGC$为二面角$A-BD-C$任平面角，

所以$\angle AGC=30^\circ$.

以点C为原点，CB,CD所在的直线分别为x轴，y轴，过点C且垂直于面CBD的直线为z轴建立空间直角坐标系(如图)，

则$C(0,0,0),B(\sqrt{2},0,0),D(0,\sqrt{2},0)$.

因为$\angle AGC=30^\circ,CG=1,AG=\sqrt{3}$，所以$AC=1$，

所以$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),E\left(\frac{3\sqrt{2}}{8},-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

所以$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面ABD的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{5\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{5\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 解得$z=\sqrt{6}x=\sqrt{6}y$,

取其中一个法向量为$\vec{n}=(1,1,\sqrt{6})$.

因为$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{8},-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，所以$\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$,

设CE与平面ABD所成的角为θ，则$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{n}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$0^\circ\leqslant\theta\leqslant90^\circ$，所以$\theta=45^\circ$，即$CE$与面$ABD$所成角的大小为$45^\circ$.

21.(12分)

在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(-2,0),B(2,0)$，直线PA与直线PB的斜率之积为$-\frac{1}{4}$记动点P的轨迹为曲线C.

(1)求曲线C的方程；

(2)若点M为曲线C上的任意一点(不含短轴端点)，点$D(0,1)$，直线AM与直线BD交于点Q，直线DM与x轴交于点G，记直线AQ的斜率为k_1，直线GQ的斜率为k_2，求证：k_1-2k_2为定值.

【解析】(1)设动点$P(x,y)$，由题意可得$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=-\frac{1}{4}$,

所以曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$.

(2)法一：设AQ的直线方程为$y=k_1(x+2)\left(k_1\neq\pm\frac{1}{2}\right)$，联立方程组$\begin{cases}y=k_1(x+2),\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+4k_1^2)x^2+16k_1^2x+16k_1^2-4=0$，由$-2\cdot x_M=\frac{16k_1^2-4}{1+4k_1^2}$，得$x_M=\frac{2-8k_1^2}{1+4k_1^2}$,

代入直线方程得$y_M=\frac{4k_i}{1+4k_1^2}$,

所以$k_{Duy}=\frac{\frac{4k_i}{1+4k_1^2}-1}{\frac{2-8k_i^2}{1+4k_1^2}}=\frac{2k_1-1}{2(2k_1+1)}$,

所以 DM 的直线方程为 $y=\dfrac{2k_1-1}{2(2k_1+1)}x+1$,所以 $G\left(\dfrac{-2(2k_1+1)}{2k_1-1},0\right)$.

联立方程组 $\begin{cases}y=k_1(x+2),\\ \dfrac{x}{2}+y=1,\end{cases}$ 解得 $Q\left(\dfrac{2-4k_i}{2k_1+1},\dfrac{4k_i}{2k_1+1}\right)$.

所以 $k_2=\dfrac{\dfrac{4k_1}{2k_1+1}}{\dfrac{2-4k_1}{2k_1+1}+\dfrac{2(2k_1+1)}{2k_1-1}}=\dfrac{2k_1-1}{4}$,

所以 $k_1-2k_2=\dfrac{1}{2}$ 为定值.

法二:设 $M(x_0,y_0)$, $x_0\neq0$, $y_0\neq0$,则直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$,

联立方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2),\\ \dfrac{x}{2}+y=1,\end{cases}$ 解得 $Q\left(\dfrac{2x_0+4-4y_0}{2y_0+x_0+2},\dfrac{4y_0}{2y_0+x_0+2}\right)$.

由直线 DM 的方程为 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$,得 $G\left(\dfrac{-x_0}{y_0-1},0\right)$,

所以 $k_2=\dfrac{\dfrac{4y_0}{2y_0+x_0+2}}{\dfrac{2x_0+4-4y_0}{2y_0+x_0+2}+\dfrac{x_0}{y_0-1}}=\dfrac{y_0-1}{x_0+2-2y_0}$.

又因为 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{2-x_0}{4y_0}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}x_0}{2y_0}=\dfrac{y_0-1+\dfrac{2}{2}x_0}{x_0+2-2y_0}$,

所以 $k_1-2k_2=\dfrac{y_0-1+\dfrac{1}{2}x_0}{x_0-2y_0+2}-2\dfrac{y_0-1}{x_0-2y_0+2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}x_0-y_0+1}{x_0-2y_0+2}=\dfrac{1}{2}$ 为定值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln x$.

(1) 判断 $f(x)$ 的华调性,并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=f(a_n)$,求证:对任意 $n\in N^*$, $a_n>a_{n+1}>\dfrac{1}{2^n}$.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{c^x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{(c^x-1)x}$.

令 $g(x)=xe^x-c^x+1$, $g'(x)=xe^x$,

因为 $x>0$,所以 $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)>g(0)=0$.

又 $x>0$, $e^x-1>0$,从而 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

(2).设 $h(x)=e^x-x-1$, $h'(x)=e^x-1$.

当 $x>0$ 时, $h'(x)>0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $e^x-1>x$,

所以 $a_{n+1}=f(a_n)=\ln(e^{a_n}-1)-\ln a_n>0$.

由 (1) 可知 $g(x)>0$,即 $x^x-e^x+1>0$,

所以 $a_ne^{a_9}-e^{a_*}+1>0$,即 $e^{a_9}>\dfrac{e^{a_z}-1}{a_n}$,从而 $a_n>a_{n+1}$.

设 $m(x)=e^x-xe^{\frac{x}{2}}-1$，则 $m'(x)=e^x-\left(e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)=e^{\frac{x}{2}}\left[e^{\frac{x}{2}}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]$.

当 $x>0$ 时，$e^{\frac{x}{2}}-\left(1+\frac{x}{2}\right)>0$，所以 $m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

故当 $x>0$ 时，$m(x)>m(0)=0$，即 $e^x-xe^{\frac{x}{2}}-1>0$，

从而 $e^{a_n}-a_ne^{\frac{a_n}{2}}-1>0$，即 $e^{\frac{a_n}{2}}<\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$，即 $\frac{a_n}{2}<\ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=a_{n+1}$.

因为 $a_{n+1}>\frac{a_n}{2}$，所以 $a_{n+1}>\frac{1}{2^n}a_1=\frac{1}{2^n}$.

综上，$a_n>a_{n+1}>\frac{1}{2^n}$.