

哈师大附中 2021 级高三第二次调研考试

数学试题

(满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一、选择题 (前 8 个小题为单选题, 每题只有一个选项, 每题 5 分, 满分 40 分; 后 4 小题为多选题, 每题不只有一个选项, 每题 5 分, 满分 20 分)

1. 已知集合 $A = \{y | y = 5 - x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | \log_3(2+x) < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{x | -2 < x < 7\}$

B. $\{x | x \leq 5\}$

C. $\{x | 5 \leq x < 7\}$

D. $\{x | -2 < x \leq 5\}$

2. 已知 $p: 0 < x < 2$, 那么 p 的一个充分不必要条件是 ().

A. $0 < x < 1$

B. $-1 < x < 1$

C. $0 < x \leq 2$

D. $0 < x < 3$

3. $\sin(-1230^\circ) = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知 $a = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{7}}$, $b = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{7}}$, $c = \log_{\frac{2}{7}} 2$, 则 ().

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

5. 若正数 x, y 满足 $x + 6y = 3$, 则 $\frac{3y}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ().

A. 4

B. $\frac{9}{8}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 2

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 其导函数为 $f'(x)$, 且 $(x-5)f'(x) < 0$, 则下列关系一定正确的是 ().

A. $f(3) + f(5) < 2f(4)$

B. $f(4) + f(6) < 2f(5)$

C. $f(0) \cdot f(5) = 0$

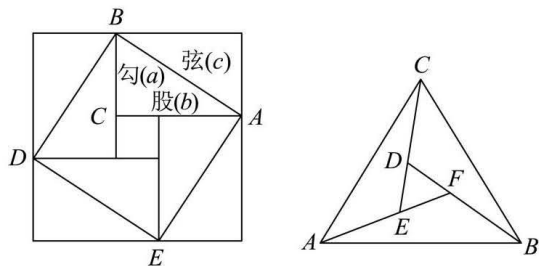
D. $f(3) + f(7) = 2f(5)$

7. 将函数 $g(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 图像上所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数

$f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且只有两个零点, 则 ω 的取值范围为 ().

- A. $\left(\frac{6}{5}, \frac{11}{6}\right]$ B. $\left(\frac{6}{5}, \frac{11}{6}\right)$ C. $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right]$ D. $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$

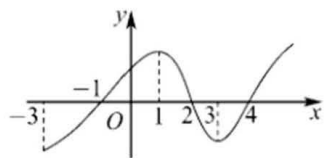
8. 我国古代数学家赵爽在《周髀算经》一书中利用“赵爽弦图”巧妙的证明了勾股定理，该图形是以弦为边长得到的正方形由4个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成. 类比“赵爽弦图”，可构造如图所示的图形，它是由3个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个较大的等边三角形，若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{EF}$ ， $|\overrightarrow{AF}| = 3$ ，则 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu =$ ().



- A. $\frac{15}{19}$ B. $\frac{6}{19}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{4\sqrt{19}}{19}$

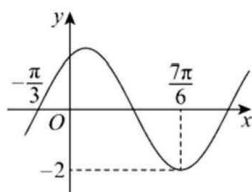
多选题（共4个小题，每题不只有一个选项，每题5分，满分20分）

9. 如图所示是 $y = f(x)$ 的导数 $y = f'(x)$ 的图象，下列结论中正确的有 ().



- A. $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1, 2) \cup (4, +\infty)$
 B. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 C. $f(x)$ 在区间 $(2, 4)$ 上单调递减，在区间 $(-1, 2)$ 上单调递增
 D. $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点
10. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a + b = 4$ ，则下列结论正确的是 ().
- A. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$ B. $2^a + 2^b \geq 8$
 C. $(a+1)^2 + (b+3)^2 \leq 32$ D. $\frac{a^2}{3} + b^2 \geq 4$

11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，下列说法正确的是 ().



- A. 函数 $y = |f(2x) + 1|$ 的周期是 $\frac{\pi}{2}$
- B. 点 $(\frac{5\pi}{3}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 的图象的对称中心
- C. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减
- D. $f(x) > 1$ 对于 $\forall x \in [-2\pi, -\frac{5\pi}{3}]$ 恒成立

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$, 定义符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 则下列结论正确的是 () .}$$

- A. $\operatorname{sgn}[f(x)]$ 是奇函数
- B. $f(2023) = \operatorname{sgn}[f(2023)]$
- C. $\operatorname{sgn}[f(2k+1)] = 1 (k \in \mathbf{Z})$
- D. $\operatorname{sgn}[f(x)]$ 关于直线 $x = 3$ 对称

二、填空题 (共 4 个小题, 每题 5 分, 满分 20 分)

13. 已知幂函数 $f(x) = (2m^2 - 7m + 7)x^m$ 为非奇非偶函数, 则实数 $m =$ _____.
14. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4 - ax)$ 在区间 $(2, 3)$ 上是单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____.
15. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} , $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $|\vec{a} + x\vec{b}|$ 的值最小时, 实数 x 的值为 _____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}, C = \frac{\pi}{3}$, 当 $BC + 3AC$ 取最大值时, $AC =$ _____.

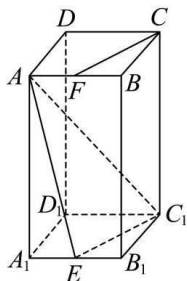
三、解答题 (共 6 题, 第 17 题 10 分, 第 18 至第 22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 角 α 的终边过点 $A(-5, -12)$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$ 的值;

(2) 若 $\alpha \in (0, 2\pi), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

18. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为线段 A_1B_1 的中点, F 为线段 AB 的中点.



- (1) 求直线 BB_1 与平面 AEC_1 所成角的正弦值;
 (2) 证明: 直线 $FC \parallel$ 平面 AEC_1 并且求出直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.
19. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_2 + a_4 = 10$, $S_4 = 16$.

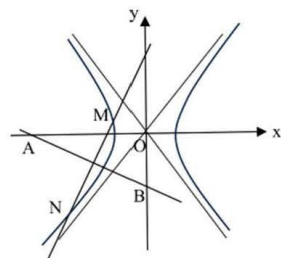
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n+1}{3^{n+1} a_n \cdot a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n < \frac{1}{12}$.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(a+b)(\sin A - \sin B) = c(\sin B + \sin C)$.

- (1) 求角 A 的大小;
 (2) 若 D 为 BC 上一点, $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC$, $AD = 3$, 求 $4b+c$ 的最小值.

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 点 $P\left(\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 在 C 上, 直线

$l: y = kx + t$ 与双曲线 C 相交于两点 M, N , 线段 MN 的垂直平分线分别与 x, y 轴相交于 A, B 两点.



- (1) 若直线 l 过点 $(0,1)$, 且点 M, N 都在双曲线的左支上, 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 的面积为 $\frac{81}{2}$, 且 $k \neq 0$, 求 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - a \ln x$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a > 0$, 若不等式 $f(x) \geq a + a \ln a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线