

2022~2023 学年高二年级下学期期末模拟测试

数学参考答案

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	D	D	C	C	A

【解析】

1. 集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | -1 < x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq 2x - 1 \leq 9\right\} = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 故选 A.

2. $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$, 所以 $\bar{z} = 1-2i$, 所以 $z - \bar{z} = 1+2i - 1+2i = 4i$, 故选

B.

3. $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, $\bar{y} = \frac{3+7+8+10+12}{5} = 8$, 则样本点的中心的坐标为 (3, 8), 代入

$y = 2.1x + \hat{a}$, 得 $\hat{a} = 8 - 2.1 \times 3 = 1.7$. 可得 $\hat{y} = 2.1x + 1.7$, 取 $x = 10$, 得 $\hat{y} = 2.1 \times 10 + 1.7 = 22.7$,

$\therefore$ 如果昼夜温差为 10°C 时, 那么种子的发芽数大约是 23 颗, 故选 B.

4. 因为 $y = f(x) = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 又 $f(-x) = \sin(-x) \cdot \ln \frac{(-x)^2+2}{(-x)^2} =$

$-\sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2} = -f(x)$, 所以 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 为奇函数, 函数图象关于原点对称, 故

排除 A, B, 又 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin x > 0$, $\frac{x^2+2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} > 1$, 所以 $\ln \frac{x^2+2}{x^2} > 0$, 所以

$y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2} > 0$, 故排除 C, 故选 D.

5. 根据题意, 设各层球的个数构成数列 $\{a_n\}$, 由题意可知, $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$,

$a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3$, $\dots$, $a_n = a_{n-1} + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, 则有 $a_n = \frac{(1+n) \times n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

故第八层球的个数 $a_8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$, 故选 D.

6. 由题意可知 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移

$\varphi\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 所以 $g(x) = \sin\left[2(x + \varphi) + \frac{\pi}{3}\right] =$

$\sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $g(x)$ 图象关于原点对称, 所以 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$,

$k \in \mathbf{Z}$, 因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故选 C.

7. 由题意, $S_{EFGH} = 6 \times 12 - 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 36$, $V_{O-EFGH} = \frac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72$, $\therefore$ 该模型的体积

$V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - V_{O-EFGH} = 12 \times 12 \times 6 - 72 = 792 \text{ cm}^3$. $\therefore$ 3D 打印所用原料密度为 0.5 g/cm^3 ,

不考虑打印损耗, $\therefore$ 制作该模型所需原料的质量为

$792 \times 0.5 = 396 \text{ g}$, 故选 C.

8. 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$, 如

图 1, 过 A, B 作准线的垂线于 D, C , 过 N 作准线的垂线于 E ,

$|AB| = |AD| + |BC| = 2|EN| = |MN|$, 所以 $\angle NMC = 30^\circ$, 可知

AB 与 x 轴的正方向的夹角为 60° , 则 l 的斜率为 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

故选 A.

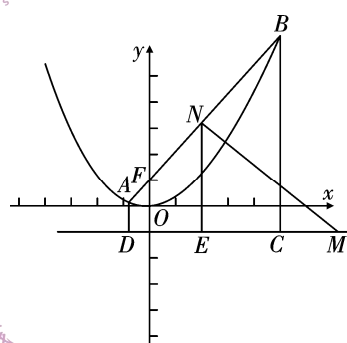


图 1

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AD	BCD	ABD

【解析】

9. 因为向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 满足 $\begin{cases} 3\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 6), \\ \vec{a} + 2\vec{b} = (6, 2), \end{cases}$ 两式相加可得 $4\vec{a} = (8, 8)$, 所以 $\vec{a} = (2, 2)$, 得

$\vec{b} = (2, 0)$, 所以 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $|\vec{a}| = \sqrt{2}|\vec{b}|$, 故 A 正确; 因为 $\vec{c} = (1, 1)$, 故 $\vec{a} = 2\vec{c}$,

所以 $\vec{a} // \vec{c}$, 故 B 正确; 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2 \times 2 + 2 \times 0}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为

$\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$, 所以 $\theta = 45^\circ$, 故 C 正确; 因为 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \times 1 + 0 \times 1 = 2 \neq 0$, 故 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 不垂直,

故 D 错误, 故选 ABC.

10. 对于 A, 根据频率和等于 1 得 $10a = 1 - 10 \times (0.005 + 0.030 + 0.035 + 0.010) = 0.20$, 解得

$a=0.020$ ，故 A 正确；对于 B，成绩在区间 $[80, 100]$ 内的学生人数约为 $200 \times 10 \times (0.035 + 0.010) = 90$ ，故 B 错误；对于 C，学生体能测试成绩的平均数约为 $(55 \times 0.005 + 65 \times 0.020 + 75 \times 0.030 + 85 \times 0.035 + 95 \times 0.010) \times 10 = 77.5$ ，故 C 错误；对于 D， $0.005 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.030 \times 10 = 0.55 < 0.69$ ， $0.005 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.030 \times 10 + 0.035 \times 10 = 0.9 > 0.69$ ，所以这组数据的 69% 分位数的估计值落在区间 $[80, 90)$ 内，又因为 $80 + \frac{0.69 - 0.55}{0.9 - 0.55} \times 10 = 84$ ，故学生体能测试成绩的 69% 分位数为 84，故 D 正确，故选 AD.

11. 由 $x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} > y^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ ，故 $y > x > 0$. 对于 A，当 $x=1$ ， $y=2$ 时 $x^y < y^x$ ，故 A 错误；

对于 B，由 $\left(\frac{1}{9}\right)^x$ 在定义域上递减，而 $y > x > 0$ ，故 $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{9}\right)^y$ ，故 B 正确；对于 C，由

$\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ ，而 $\log_2 x$ 在定义域上递增，故 $\log_2 \frac{1}{x^2+1} > \log_2 \frac{1}{y^2+1}$ ，故 C 正确；对于 D，

因为 $x(y-x) > 0$ ，则 $4x(y-x) + \frac{2}{x(y-x)} \geq 2\sqrt{4x(y-x) \cdot \frac{2}{x(y-x)}} = 4\sqrt{2}$ ，仅当

$4x(y-x) = \frac{2}{x(y-x)}$ ，即 $2x^2(y-x)^2 = 1$ 时等号成立，所以，只需 $y^2 \geq 4x(y-x)$ ，而

$y^2 - 4xy + 4x^2 = (y-2x)^2 \geq 0$ ，仅当 $y=2x$ 时等号成立，综上， $y^2 + \frac{2}{x(y-x)} \geq 4\sqrt{2}$ ，仅

当 $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ， $y = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ 时等号成立，故 D 正确，故选 BCD.

12. 由 $f(x) = (x+1)e^x$ ，得 $f'(x) = (x+2)e^x$ ，当 $x=-2$ 时， $f'(-2)=0$ ，B 正确；当 $x < -2$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x > -2$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增，因此函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值 $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$ ，递减区间为 $(-\infty, -2)$ ，A 正确，C 错误；函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减，且恒有 $f(x) < 0$ ，在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增， $f(-1)=0$ ，

$f(x)_{\min} = f(-2) = -\frac{1}{e^2}$ ，函数 $g(x) = f(x) - a$ 有两

个不同的零点，即函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个公共点，在同一坐标系内作出直线 $y = a$ 与函数 $y = f(x)$ 的部分图象，如图 2，观察

图象知，当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时，直线 $y = a$ 与函数

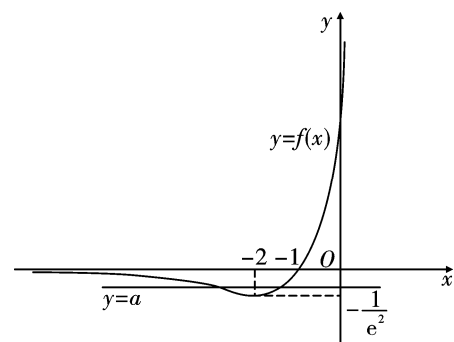


图 2

$y=f(x)$ 的图象有两个公共点, 所以函数 $g(x)=f(x)-a$ 有两个不同的零点时,

$a \in \left(-\frac{1}{e^2}, 0\right)$, D 正确, 故选 ABD.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{2}$	15	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{2}; 2+\sqrt{3}$

【解析】

13. 由于 $a=2\cos 72^\circ$, 所以 $\frac{a\sin 72^\circ}{\sqrt{2-a}} = \frac{2\cos 72^\circ \sin 72^\circ}{\sqrt{2-2\cos 72^\circ}} = \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\sqrt{2-2(1-2\sin^2 36^\circ)}} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{1}{2}$.

14. 令 $x=1$ 得, $2 \times (a+1)^5 = 64$, 解得 $a=1$, 则 $(x+1)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r}$, 分别取 $5-r=2$ 与 $5-r=4$, 得 $r=3, r=1$, 所以 $(x+1)^5$ 的展开式中含有 x^2 的项的系数为 C_5^3 , 含有 x^4 的项的系数为 C_5^1 , 所以展开式中 x^3 项的系数为 $C_5^3 + C_5^1 = 15$.

15. 如图 3, 作 $OD \perp l$, 垂足为 D , 因为 $|MN| = \sqrt{3}r$,

$|FN| = \frac{\sqrt{3}}{3}r$, 所以 $|DF| = \frac{1}{2}|MN| - |FN| = \frac{\sqrt{3}}{6}r$,

$|OD| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}|MN|\right)^2} = \frac{1}{2}r$, 易知 $k_{OD} = -\frac{|DF|}{|OD|}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_l = \frac{|OB|}{|OF|} = \frac{b}{c}$, 又 $OD \perp l$, 所以 $\frac{b}{c} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= -1$, 即 $b = \sqrt{3}c$, 所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3c^2 + c^2} = 2c$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

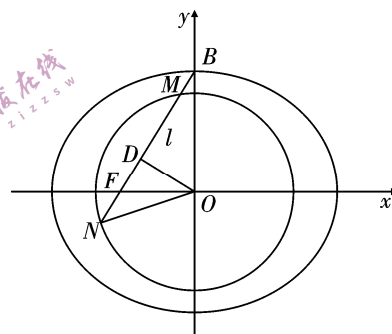


图 3

16. 易得 $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$ 的面积为定值, 又 $\triangle ABA' \cong \triangle ACA'$,

显然当 $\angle A'BA = \frac{\pi}{2}$ 时, 此时 $\triangle ABA'$, $\triangle ACA'$ 面积最大, 即四

面体 $A'ABC$ 的表面积最大, 此时 $A'A = 2\sqrt{2}$; 当四面体 $A'ABC$ 的表面积最大时, 易知四面体 $A'ABC$ 的表面积最大值为

$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4 + 2\sqrt{3}$, 如图 4, 设 $A'A$ 的中点

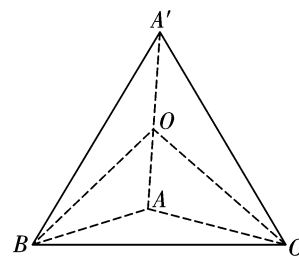


图 4

为 O ，易知 $OB = OC = \frac{1}{2}AA'$ ， $\therefore OB = OC = OA = OA' = \sqrt{2}$ ，即 O 为四面体 $A'ABC$ 的外接球球心，四面体 $A'ABC$ 的外接球半径 $R = \sqrt{2}$ ， $\because OB = OC = \sqrt{2}$ ，且 $BC = 2$ ， $\therefore BC^2 = OB^2 + OC^2$ ， $\therefore \angle BOC = \frac{\pi}{2}$ ，由 $OC \perp OB$ ， $OC \perp AA'$ ， $OB, AA' \subset$ 平面 $A'AB$ ， $OB \cap AA' = O$ ，可得 $OC \perp$ 平面 $A'AB$ ， $\therefore$ 四面体 $A'ABC$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A'AB} \cdot OC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，又 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot r + \frac{1}{3} S_{\triangle A'BC} \cdot r + \frac{1}{3} S_{\triangle AA'B} \cdot r + \frac{1}{3} S_{\triangle AA'C} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot (4 + 2\sqrt{3}) \cdot r$ ， $\therefore \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，解得 $r = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}}$ ， $\therefore \frac{R}{r} = 2 + \sqrt{3}$ 。

四、解答题（共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

解：（I）选择条件①，

因为 $\vec{m} = \left(\sin A, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ， $\vec{n} = (2\cos 2A, 2\cos A)$ ，且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$ ，

所以 $\sin A \cdot 2\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\cos 2A = 0$ ，即 $\sin 2A = -\sqrt{3}\cos 2A$ ，.....（2 分）

所以 $\tan 2A = -\sqrt{3}$ ，.....（3 分）

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形可知 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ，则 $0 < 2A < \pi$ ，

故 $2A = \frac{2\pi}{3}$ ，可得 $A = \frac{\pi}{3}$ 。.....（5 分）

选择条件②，

因为 $2ac\sin B = \sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2)$ ，

由余弦定理可得 $2ac\sin B = \sqrt{3} \times 2bc\cos A$ ，

由正弦定理可得 $2\sin A\sin C\sin B = 2\sqrt{3}\sin B\sin C\cos A$ ，.....（2 分）

在三角形 ABC 中，可知 $\sin B \neq 0$ ， $\sin C \neq 0$ ，

则 $\sin A = \sqrt{3}\cos A$ ，即 $\tan A = \sqrt{3}$ ，.....（4 分）

因为三角形 ABC 中，可知 $0 < A < \pi$ ，故 $A = \frac{\pi}{3}$ 。.....（5 分）

选择条件③，

因为 $\cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 A + 1 - \sin B\sin C$ ，

所以 $1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C = 1 - \sin^2 A + 1 - \sin B\sin C$ ，

即 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$,

由正弦定理可得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, (2 分)

根据余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, (4 分)

由 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \pi$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ (5 分)

(II) 因为 $A = \frac{\pi}{3}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = 6\sqrt{3}$,

所以 $bc = 24$, (6 分)

由余弦定理可得 $6^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$

$= (b+c)^2 - 3bc = (b+c)^2 - 3 \times 24$,

解得 $b+c = 6\sqrt{3}$, (8 分)

设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r ,

因为 $S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2} \times (6+6\sqrt{3}) \cdot r = 6\sqrt{3}$,

所以 $r = 3 - \sqrt{3}$, 即 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 $3 - \sqrt{3}$ (10 分)

18. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_n = 2a_n - n + 1$, ①,

当 $n=1$ 时, 解得 $a_1 = 0$,

故 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - (n+1) + 1$, ②, (2 分)

②-①得: $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1$, (3 分)

即 $a_{n+1} = 2a_n + 1$,

故 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, (5 分)

故数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列. (6 分)

(II) 解: 由 (I) 得: $a_n + 1 = 2^{n-1}$,

整理得 $a_n = 2^{n-1} - 1$ (7 分)

数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_2$, $b_{n+1} = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ a_n - b_n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$

故 $b_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-1} - 1 & (n \text{ 为奇数}), \\ 2^{n-1} - 1 - b_n & (n \text{ 为偶数}), \end{cases}$ 且 $b_1 = a_2 = 1$, (8 分)

当 n 为偶数时, $b_{n+1} = 2^{n-1} - 1 - b_n$,

整理得 $b_{n+1} + b_n = 2^{n-1} - 1$, (9 分)

$$\begin{aligned}
 &\text{故 } b_1 + b_2 + \cdots + b_{20} = b_1 + (b_2 + b_3) + \cdots + (b_{18} + b_{19}) + b_{20} \\
 &= 1 + (2^1 - 1) + (2^3 - 1) + \cdots + (2^{17} - 1) + (2^{18} - 1) \\
 &= 1 + \frac{2 \times (1 - 4^9)}{1 - 4} - 9 + 2^{18} - 1 \\
 &= \frac{5 \times 2^{18} - 29}{3}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

19. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 由题意可知 $P-ABC$ 为一个三棱锥, 且 $PA=PB=PC$,

$\therefore BC=2, EF=1$,

$\therefore D, E, F$ 分别为 PA, PB, PC 的中点, 且 $AB=2DE=2\sqrt{5}$.

$\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

取 AB 的中点 M , 连接 PM, CM , 则 $PM \perp AB$.

$\therefore AC=4, BC=2, AB=2\sqrt{5}$,

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2, \therefore CA \perp CB$.

$\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$\therefore AM=CM=\sqrt{5}$, 则 $\triangle PAM \cong \triangle PCM$,

故 $\angle PMA = \angle PMC = 90^\circ$,

即 $PM \perp MC$.

$\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$\therefore PM \perp AB, AB \cap MC = M, AB, MC \subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore PM \perp \text{平面 } ABC$.

又 $PM \subset \text{平面 } ABD$, 故平面 $ABD \perp \text{平面 } ABC$.

$\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(II) 解: $\therefore V_{F-BCD} = \frac{1}{2}V_{D-BCP} = \frac{1}{4}V_{A-BCP} = \frac{1}{4}V_{P-ABC} = 2$,

$\therefore V_{P-ABC} = 8$.

而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times PM = \frac{1}{3} \times 4 \times PM = 8$,

解得 $PM = 6$.

$\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 过点 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立如图 5 所示的空间直角坐标系 $C-xyz$,

则 $A(4, 0, 0), P(2, 1, 6), B(0, 2, 0), D\left(3, \frac{1}{2}, 3\right), F\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)$.

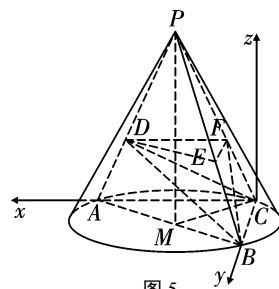


图 5

$\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

设平面 EBD 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0), \\ \overrightarrow{AP} = (-2, 1, 6), \end{cases} \therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = -4x + 2y = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = -2x + y + 6z = 0, \end{cases}$$

不妨设 $x=1$, 则 $\vec{n}_1 = (1, 2, 0)$ (8 分)

同理设平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (a, b, c)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{BD} = \left(3, -\frac{3}{2}, 3\right), \\ \overrightarrow{DF} = (-2, 0, 0), \end{cases} \therefore \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BD} = 3a - \frac{3}{2}b + 3c = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DF} = -2a = 0, \end{cases}$$

不妨设 $b=2$, 则 $\vec{n}_2 = (0, 2, 1)$ (10 分)

$$\therefore |\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 平面 EBD 与平面 BDF 夹角的余弦值为 $\frac{4}{5}$ (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

$$\text{解: (I) } r = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{800}{\sqrt{80 \times 9000}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

则根据相关系数 r , 可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. (4 分)

(II) 设 A 家庭套住小白兔的人数为 X_1 , 则 $X_1 \sim B\left(3, \frac{3}{10}\right)$,

$$\therefore E(X_1) = 3 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}, \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

设 A 家庭的盈利为 X_2 , $X_2 = 60X_1 - 90$,

$$\text{则 } E(X_2) = E(60X_1 - 90) = 60E(X_1) - 90 = 54 - 90 = -36, \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

设 B 家庭套住小白兔的人数为 Y_1 ,

Y_1 的可能取值分别为 0, 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(Y_1 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12},$$

$$P(Y_1 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{72},$$

$$P(Y_1 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

$$P(Y_1 = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}, \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore E(Y_1) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{31}{72} + 2 \times \frac{5}{36} + 3 \times \frac{1}{72} = \frac{3}{4}, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

设 B 家庭的盈利为 Y_2 , $Y_2 = 60Y_1 - 90$,

$$\therefore E(Y_2) = E(60Y_1 - 90) = 60E(Y_1) - 90 = 45 - 90 = -45,$$

$\because -36 > -45$, $\therefore B$ 家庭损失较大. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

21. (本小题满分 12 分)

(I) 解: 因为焦距为 6, 所以 $c = 3$, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

将点 $(5, 4)$ 代入 C 的方程, 得 $\frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

又因为 $a^2 + b^2 = c^2$, 解得 $a^2 = 5$, $b^2 = 4$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(II) 证明: $\because M$ 是直线 $x = \frac{a^2}{3}$ 上一点, $\therefore M$ 的横坐标为 $x = \frac{5}{3}$,

设直线 MF 的方程为 $x = my + 3$, 则 $y_M = -\frac{4}{3m}$, $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

联立方程组 $\begin{cases} x = my + 3, \\ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 得 $(4m^2 - 5)y^2 + 24my + 16 = 0$, $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $\Delta > 0$, 且 $y_1 + y_2 = -\frac{24m}{4m^2 - 5}$, $y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 5} \left(m \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$, $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

$\because l \parallel OA$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y + \frac{4}{3m} = \frac{y_1}{my_1 + 3} \left(x - \frac{5}{3} \right)$, ①,

又直线 OB 的方程为 $y = \frac{y_2}{my_2 + 3} x$, ②,

由①②消去 x 得 $y = \frac{3y_1 y_2 + \frac{4}{m} y_2}{3(y_1 - y_2)}$, $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

在 $y_1 + y_2 = -\frac{24m}{4m^2 - 5}$, $y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 5} \left(m \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ 中,

两式相除, 得 $\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{2}{3m}$, 则 $y_1 y_2 = -\frac{2}{3m} (y_1 + y_2)$, $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

$$\text{则 } y_p = \frac{3y_1y_2 + \frac{4}{m}y_2}{3(y_1 - y_2)} = \frac{-\frac{2}{m}(y_1 + y_2) + \frac{4}{m}y_2}{3(y_1 - y_2)} = \frac{-\frac{2}{m}(y_1 - y_2)}{3(y_1 - y_2)} = -\frac{2}{3m},$$

$$\because y_Q = 0, \therefore y_P = \frac{y_M + y_Q}{2},$$

故 P 为线段 MQ 的中点. (12 分)

22. (本小题满分 12 分)

(I) 解: 因为 $f(x) = e^x - 1 - (a+1)x$, 则 $f'(x) = e^x - (a+1)$, (1 分)

当 $a \leq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$, $f(x) = e^x - 1 - (a+1)x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$; (2 分)

当 $a > 0$, 则当 $x \in (0, \ln(a+1))$, $f'(x) = e^x - (a+1) < 0$,

即 $f(x) = e^x - 1 - (a+1)x$ 在 $x \in (0, \ln(a+1))$ 上单调递减,

$f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意, (3 分)

综上可得 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ (4 分)

(II) 证明: 因为 $x > 0$, $m \geq 1$, $f(x) = e^x - 1 - (a+1)x$,

所以要证明 $f(x) > \frac{x^2}{\ln(x+m)} - (a+1)x$, 只需证明 $\frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{\ln(x+m)}$,

只需证 $\frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{\ln(x+1)}$, 即证 $\frac{e^x - 1}{x} > \frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{\ln(x+1)}$, (6 分)

设 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $x > 0$, 所以 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$,

令 $h(x) = (x-1)e^x + 1$, 因为 $h'(x) = xe^x > 0$,

所以 $h(x) = (x-1)e^x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $h(x) > h(0) = 0$,

所以 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, (8 分)

令 $t(x) = x - \ln(x+1)$, $x > 0$, $t'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$,

所以 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $t(x) > t(0) = 0$,

即 $x > \ln(x+1)$ 成立, (10 分)

所以 $g(x) > g(\ln(x+1))$, 即 $\frac{e^x - 1}{x} > \frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{\ln(x+1)}$,

所以 $f(x) > \frac{x^2}{\ln(x+m)} - (a+1)x$ 成立. (12 分)