

四川省绵阳中学高 2022 届高三第一次质量检测

理科数学 参考答案

1-6 A D D B B B

7-12 B A A A D A

13. $-\frac{4}{3}$

14.4

15. $[-2, 2]$

16. $(-\infty, \frac{7}{3}]$

17.解: (1) 正项等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $S_n^2 = a^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, ①,

当 $n=1$ 时, 解得 $a_1=1$;

当 $n=2$ 时, $S_2^2 = a_1^2 + a_2^2$,

整理得 $a_2^2 - a_2 - 2 = 0$,

解得 $a_2=2$ 或 -1 (负值舍去),

故公差 $d=a_2-a_1=1$,

故 $a_n=n$.

(2) 由 (1) 得:

$$b_n = (-1)^n \frac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)} = (-1)^n \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_{2n} = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} = \frac{1}{4n+1} - 1 = -\frac{4n}{4n+1}$$

18. 解:(1)由表中的数据可知: $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, $\bar{y} = \frac{120+105+100+95+80}{5} = 100$,

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{1410 - 1500}{55 - 45} = -9, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 100 - (-9) \times 3 = 127,$$

\therefore 所求得回归直线方程为 $\hat{y} = -9x + 127$,

当 $x=10$ 时, $\hat{y} = -9 \times 10 + 127 = 37$, \therefore 该小区 10 月份的对这款 App 不满意人数预估为 37 人;

(2) $P(27 < X \leq 47) = P(35 - 2 \times 4 < X \leq 35 + 3 \times 4) \approx 0.9454 + \frac{0.9973 - 0.9545}{2} \approx \frac{0.9545 + 0.9973}{2} = 0.9759$.

(3) 提出假设 H_0 : 是否使用这款 App 与性别无关.

由表中的数据可得 $K^2 = \frac{100 \times (48 \times 18 - 22 \times 12)^2}{60 \times 40 \times 70 \times 30} = \frac{50}{7} \approx 7.143 > 6.635$,

根据临界值可得, 有 99% 的把握认为是否使用这款 App 与性别有关.

19. (1) $\because SA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore SA \perp BD$.

\because 底面 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AC \perp BD$, 又 $SA \cap AC = A$, $\therefore BD \perp$ 平面 SAC .

$\because BD \subset$ 平面 EBD , \therefore 平面 $EBD \perp$ 平面 SAC .

(2) 设 $AC \cap BD = F$, 连接 SF , 则易知 $SF \perp BD$,

$\because AB = 2$, $\therefore BD = 2\sqrt{2}$. 大为 $SF = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\Delta SBD} = \frac{1}{2}BD \cdot SF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$,

设点 A 到平面 SBD 的距离为 h ,

$\because SA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta SBD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABD} \cdot SA$, $\therefore 6 \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 4$, $\therefore h = \frac{4}{3}$,

\therefore 点 A 至平面 SBD 的距离为 $\frac{4}{3}$.

(3) 设 $SA = a$ ($a > 0$), $AB = 1$, 以 A 为原点, AB, AD, AS 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系如图,

则 $C(1, 1, 0)$, $S(0, 0, a)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$,

$\therefore \vec{SC} = (1, 1, -a)$, $\vec{SB} = (1, 0, -a)$, $\vec{SD} = (0, 1, -a)$

设平面 SBC , 平面 SCD 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{SC} = 0 \Rightarrow x_1 + y_1 - az_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{SB} = 0 \Rightarrow x_1 - az_1 = 0 \end{cases}$$

取 $x_1 = a$, 则 $y_1 = 0$, $z_1 = 1$,

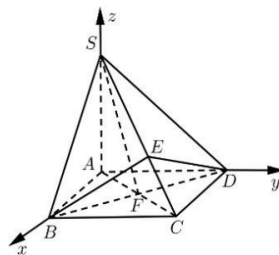
可得 $\vec{n}_1 = (a, 0, 1)$, 同理可得 $\vec{n}_2 = (0, a, 1)$.

$$\therefore \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{a^2 + 1}$$

要使二面角 $B-SC-D$ 的大小为 120° ,

则 $\frac{1}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}$, 从而 $a = 1$,

即当 $\frac{SA}{AB} = \frac{a}{1} = 1$ 时, 二面角 $B-SC-D$ 的大小为 120° .



20. 解: (1) $f(x) = pe^x - q\cos x$, $f'(x) = pe^x + q\sin x$,

由题意得 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} p - q = 0 \\ p = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}$;

$$(2) g(x) = e^x + \sin x - 2x,$$

$$\therefore g'(x) = e^x + \cos x - 2, g''(x) = e^x - \sin x,$$

①当 $x < 0$ 时, 由 $e^x < 1, \cos x \leq 1$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x - 2 < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

②当 $x \geq 0$ 时, 由 $e^x \geq 1, \sin x \leq 1$ 知 $g''(x) = e^x - \sin x > 0$, $\therefore g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g'(x) \geq g'(0) = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(0) = 1;$$

(3) 对 x 分情况讨论处理:

(i) 当 $x > 0$ 时, 不等式 $xf(x) \geq x^3 + ax^2$ 等价于 $e^x \geq x^2 + ax + \cos x$,

$$\text{令 } G(x) = e^x - x^2 - ax - \cos x, \text{ 则 } G'(x) = e^x - 2x + \sin x - a = g(x) - a,$$

①当 $a \leq 1$ 时, 由 (2) 知 $G'(x) = g(x) - a > g(0) - a = 1 - a \geq 0$,

$\therefore G(x)$ 单调递增,

$\therefore G(x) > G(0) = 0$, 满足题意;

②当 $a > 1$ 时, 由 (2) 知 $G'(x) = g(x) - a = e^x - 2x + \sin x - a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

容易证明 $e^x \geq ex$, 故 $G'(x) = g(x) - a = e^x - 2x + \sin x - a > (e-2)x - 1 - a$,

$$\therefore G'\left(\frac{1+a}{e-2}\right) > 0,$$

$$\text{又 } G'(0) = 1 - a < 0,$$

\therefore 存在唯一的 $x_0 \in \left(0, \frac{1+a}{e-2}\right)$, 使得 $G'(x_0) = 0$,

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 单调递减,

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $G(x) < G(0) = 0$, 不满足题意.

(ii) 当 $x < 0$ 时, 不等式 $xf(x) \geq x^3 + ax^2$ 等价于 $e^x \leq x^2 + ax + \cos x$,

当 $a \leq 1$ 时, 同 (i) 可知 $G'(x) > 0$, $\therefore G(x)$ 上单调递增,

$\therefore G(x) < G(0) = 0$, 满足题意;

(iii) 当 $x=0$ 时, 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 原不等

式成立. 综上得, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

21.(1)由已知得 $b=4$ 且 $\frac{5}{a^2} + \frac{12}{b^2} = 1$, 解得 $a^2=20$,

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 1. 设直线 l 为 $y=k(x-2)$ 代入 G 得: $(4+5k^2)x^2 - 20k^2x + 20k^2 - 80 = 0$

$$\Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{20k^2}{4+5k^2}, x_1x_2 = \frac{20k^2-80}{4+5k^2}, y_1y_2 = k^2[x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4] = \frac{-64k^2}{4+5k^2},$$

$$\vec{t}_{OM} \cdot \vec{ON} + \vec{FM} \cdot \vec{FN}$$

$$= t(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1 - 2, y_1) \cdot (x_2 - 2, y_2)$$

$$= t(x_1x_2 + y_1y_2) + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1y_2$$

$$= t \frac{20k^2-80}{4+5k^2} + t \frac{-64k^2}{4+5k^2} + \frac{20k^2-80}{4+5k^2} - 2 \frac{20k^2}{4+5k^2} + 4 + \frac{-64k^2}{4+5k^2}$$

$$= \frac{-(44t+64)k^2 - (80t+64)}{5k^2+4},$$

若 $\vec{t}_{OM} \cdot \vec{ON} + \vec{FM} \cdot \vec{FN}$ 为定值, 故 $\frac{44t+64}{5} = \frac{80t+64}{4}$, 解得 $t = -\frac{2}{7}$, 定值为 $-\frac{72}{7}$,

2. 当直线 l 斜率不存在时, $M(2, \frac{8\sqrt{5}}{5}), N(2, -\frac{8\sqrt{5}}{5})$

$$\therefore \vec{t}_{OM} = (2, \frac{8\sqrt{5}}{5}), \vec{ON} = (2, -\frac{8\sqrt{5}}{5}), \vec{FM} = (0, \frac{8\sqrt{5}}{5}), \vec{FN} = (0, -\frac{8\sqrt{5}}{5})$$

$$\vec{t}_{OM} \cdot \vec{ON} = 4 - \frac{64}{5} = -\frac{44}{5}, \vec{FM} \cdot \vec{FN} = -\frac{64}{5}, \text{ 当 } t = -\frac{2}{7} \text{ 时, } \vec{t}_{OM} \cdot \vec{ON} + \vec{FM} \cdot \vec{FN} = -\frac{72}{7}$$

综上所述, 存在常数 $t = -\frac{2}{7}$, 使得 $\vec{t}_{OM} \cdot \vec{ON} + \vec{FM} \cdot \vec{FN}$ 为定值 $-\frac{72}{7}$.

22.解: (1) 将 $\rho \cos \theta = x$ 和 $\rho \sin \theta = y$ 代入极坐标方程 $4\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 3$ 中,

得曲线 E 的直角坐标方程为 $4x + y - 3 = 0$;

将曲线 M 的参数方程化为 $\begin{cases} x = \cos \phi \\ \frac{y}{3} = \sin \phi \end{cases}$, 两式平方相加得 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$,

故曲线 M 的普通方程为 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$;

(2) 将曲线 E 的直角坐标方程 $4x + y - 3 = 0$, 代入曲线 M 的普通方程 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 中,

整理得 $25x^2 - 24x = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x = \frac{24}{25}$,

当 $x=0$ 时, $y=3$; 当 $x = \frac{24}{25}$ 时, $y = -\frac{21}{25}$.

可得曲线 E 与 M 的两交点坐标为 $(0, 3)$ 和 $(\frac{24}{25}, -\frac{21}{25})$.

23.解: (1) 设 $m=x^2$, 则 $m \geq 0$,

\therefore 不等式 $f(x) < 5$ 可化为 $|2m-1|+|m-5| < 5$,

等价于 $\begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ 1-2m+5-m < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{2} < m \leq 5 \\ 2m-1+5-m < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m > 5 \\ 2m-1+m-5 < 5 \end{cases}$,

解得 $\frac{1}{3} < m \leq \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} < m < 1$, 或 $m \in \emptyset$,

即 $\frac{1}{3} < m < 1$,

$\therefore \frac{1}{3} < x^2 < 1$, 解得 $-1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$,

$\therefore f(x) < 5$ 的解集为 $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$;

(2) $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = 2x^2 - 1 + |x^2 - 5|$,

当 $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ 时, $f(x) \geq tx$ 等价于 $(2x^2 - 1) + (5 - x^2) \geq tx$,

即 $x + \frac{4}{x} \geq t$,

又 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, 当且仅当 $x=2$ 时取 "=",

$\therefore t \leq 4$;

当 $x > \sqrt{5}$ 时, $f(x) \geq tx$ 等价于 $(2x^2 - 1) + (x^2 - 5) \geq tx$,

即 $3x - \frac{6}{x} \geq t$,

又 $y = 3x - \frac{6}{x}$ 在 $x \in (\sqrt{5}, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore 3x - \frac{6}{x} > 3\sqrt{5} - \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$,

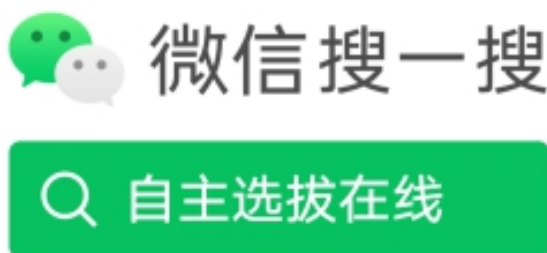
$\therefore t < \frac{9\sqrt{5}}{5}$.

综上知, 实数 t 的取值范围是 $t \leq 4$. 即 t 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》