姓　　名____________

准考证号____________

绝密★启用前

湘豫名校联考(2021年3月)

数学(理科)试卷

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集U,集合M,N是U的子集,且$M\subsetneqq N$,则下列结论中一定正确的是

A. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)=U$　　B. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

C. $M\cup(\complement_U N)=U$　　D. $(\complement_U M)\cap N=\varnothing$

2. 在复平面内,若复数z与$\frac{1-i}{1+2i}$表示的点关于虚轴对称,则复数$z=$

A. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$　　B. $-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$　　C. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$　　D. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

3. 关于x的方程$x^2-ax+b=0$,有下列四个命题:

甲:$x=1$是方程的一个根;乙:$x=1$是方程的一个根;

丙:该方程两根之和为3;丁:该方程两根异号.

如果只有一个假命题,则假命题是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4. 在平面直角坐标系中定义点$P(x,y)$的"准奇函数点"为$P'(2a-x,2b-y)$,若函数C上所有点的"准奇函数点"都在函数C上,则称函数C为"准奇函数".下列函数不是"准奇函数"的是

A. $f(x)=\cos(x+1)$　　B. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

C. $f(x)=e^{|x|}$　　D. $f(x)=x$

5. 已知空间中不重合的直线 a,b 和不重合的平面 α,β，下列判断正确的是

A. 若 $a/\!/\alpha, b/\!/\alpha$，则 $a/\!/b$　　B. 若 $a/\!/b, b\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$

C. 若 $a\perp b, a\perp\alpha$，则 $b/\!/\alpha$　　D. 若 $a\perp\alpha, a\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

6. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若向量 $\boldsymbol{c}=\sqrt{5}\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}$，则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{59}}{8}$

7. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-4\geqslant 0,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=-2x+y$ 的最大值是

A. -1　　B. -2　　C. -5　　D. -7

8. 下列函数中，同时满足以下两个条件①“$\forall x\in\mathbf{R}, f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)+f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)=0$”；②“将图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象对应函数为 $g(x)=\cos 2x$”的一个函数是

A. $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

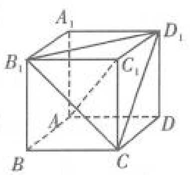
9. 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(3,0)$，$B(0,-3)$，点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x+y=1$，点 N 为曲线 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 上的动点，则 $|MN|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{2}-1$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

10. 已知双曲线 T 的焦点在 x 轴上，对称中心为原点，$\triangle ABC$ 为等边三角形. 若点 A 在 x 轴上，点 B,C 在双曲线 T 上，且双曲线 T 的虚轴为 $\triangle ABC$ 的中位线，则双曲线 T 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{5}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

11. 已知正方体棱长为 6，如图，有一球的球心是 AC_1 的中点，半径为 2，平面 B_1D_1C 截此球所得的截面面积是



A. π　　B. 7π　　C. 4π　　D. 3π

12. 数列 $\{a_n\}$ 各项均是正数，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{2}$，函数 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在点 $\left(a_n,\frac{1}{3}a_n^3\right)$ 处的切线过点 $\left(a_{n+2}-2a_{n+1},\frac{7}{3}a_n^3\right)$，则下列命题正确的个数是

① $a_3+a_4=18$；

② 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是等比数列；

③ 数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是等比数列；

④ $a_n=3^{n-1}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=3x-\cos x$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-my+1=0$ 垂直，则实数 m 的值为________.

14. 已知二项式 $(1+x)^n$ 展开式中只有第 7 项的二项式系数最大，则 $(1-x)(1+x)^n$ 展开式中一次项系数为________.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-a_3=-\frac{8}{27}$，$a_2-a_4=-\frac{8}{9}$，则使得 $a_1a_2\cdots a_n$ 取得最小值的 n 为________.

16. 已知过点 $A(2,2)$ 作直线 AB,AC 与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 相切，且交抛物线 $x^2=2y$ 于 B,C 两点，则 BC 的直线方程为________.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

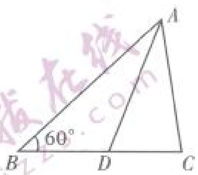
(一)必考题：共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ$，$AB=8$，$AD=7$，点 D 在 BC 上，且 $\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$.

(1)求 BD；

(2)若 $\cos\angle CAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



18. (本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三人组成“梦之队”参加市知识竞答比赛，每轮活动由甲、乙、丙各完成一道问题，在每一轮活动中，如果三人都答对，则“梦之队”得 3 分；如果只有两个人答对，则“梦之队”得 2 分；如果三人只有一个人答对，则“梦之队”得 1 分，如果三个人都没有答对，则“梦之队”得 0 分. 已知甲每轮答对的概率是 $\frac{3}{4}$，乙每轮答对的概率是 $\frac{2}{3}$，丙每轮答对的概率是 $\frac{1}{2}$；每轮活动中甲、乙、丙答对与否互不影响，各轮结果亦互不影响. 假设“梦之队”参加三轮活动，求：

(1)“梦之队”第一轮得分 X 的分布列和数学期望；

(2)“梦之队”三轮得分之和为 4 分的概率.

19.（本小题满分 12 分）

图 1 是由正方形 $ABCD$，Rt△ABE，Rt△CDF 组成的一个平面图形，其中 $AB=AE=DF=1$，将其沿 AB、CD 折起使得点 E 与点 F 重合，如图 2.

(1)证明：图 2 中的平面 ABE 与平面 ECD 的交线平行于底面 $ABCD$；

(2)求二面角 $B—EC—D$ 的余弦值.

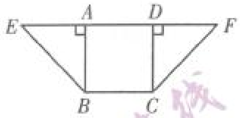


图 1

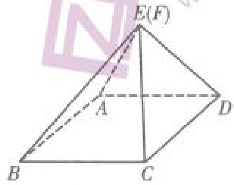


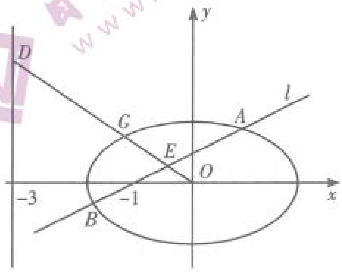
图 2

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 如图所示，斜率为 $k(k>0)$ 且过点 $(-1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 E，射线 OE 交椭圆 C 于点 G，交直线 $x=-3$ 于点 $D(-3,m)$.

(1)求证：$mk=1$；

(2)若 F 在射线 OE 上，且 $|OG|^2=|OE|\cdot|OF|$，求证：点 F 在定直线上.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1(x>0)$，$g(x)=(\sqrt{3}-1)\cdot e^{-\sqrt{3}x}+(\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}-2)\sin x$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值；

(2)证明：$f(x)>g(x)$.

(二)选考题:共10分.请考生在22、23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)[选修4—4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$($\alpha$ 为参数且 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(1)说明 C_1 是哪种曲线,并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(2)设点 A 的极坐标为 $\left(4\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)$,射线 $\theta=\gamma\left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$ 与 C_1 的交点为 M(异于极点),与 C_2 的交点为 N(异于极点),若 $|MN|=\sqrt{3}|MA|$,求 $\tan\gamma$ 的值.

23.(本小题满分10分)[选修4—5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|2x|-|x+2|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 1$ 的解集;

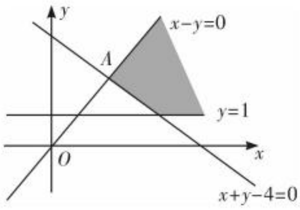
(2)若 $\forall x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\geqslant\cos x+a$ 成立,求实数 a 的取值范围.

湘豫名校联考(2021年3月)
数学(理科)参考答案

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	A	C	D	B	B	D	C	A	A	B

7. B 【解析】画出约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x+y-4\geqslant 0,\\y\geqslant 1\end{cases}$所表示的平面区域,如图所示,



由目标函数$z=-2x+y$可化为$y=2x+z$.

当直线$y=2x+z$过点A时,在y轴上的截距最大,此时目标函数取得最大值,

又由$\begin{cases}x+y-4=0,\\x-y=0,\end{cases}$解得$A(2,2)$,

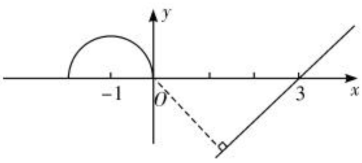
所以z的最大值为$-2\times 2+2=-2$.

故选:B.

9. C 【解析】点M在直线AB:$y=x-3$上,

点N在曲线:$(x+1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$上,

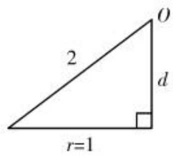
$\therefore |MN|_{\min}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



10. A 【解析】设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,虚轴长为$2b$,则$BC=4b$,$BC$关于$x$轴对称,不妨设$B$在双曲线左支,则其纵坐标为$2b$,根据$\triangle ABC$为等边三角形,$\angle ABC=60°$可得$x_B=-\sqrt{3}b$,故$B(-\sqrt{3}b,2b)$,将$B$的坐标代入双曲线方程有$\frac{3b^2}{a^2}-\frac{4b^2}{b^2}=1$,则$\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{3}$,则渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}x$.

11. A 【解析】$\because$正方体的棱长为6,

$\therefore$体对角线为$6\sqrt{3}$,球心到平面B_1D_1C的距离为体对角线的$\frac{1}{6}$,



$\therefore d=\frac{1}{6}\times 6\sqrt{3}=\sqrt{3}$,又球半径$R=2$,设截面圆半径为$r$,则$r=\sqrt{R^2-d^2}=1$,

$\therefore S=\pi r^2=\pi$.

12. B 【解析】由 $y=\frac{1}{3}x^3$ 得 $y'=x^2$,

$k_{切}=a_n^2=\dfrac{\frac{1}{3}a_n^3-\frac{7}{3}a_n^3}{a_n-(a_{n+2}-2a_{n+1})}=\dfrac{-2a_n^3}{a_n-a_{n+2}+2a_{n+1}}$,

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=2a_n \Rightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n$(*),

①$n=1, a_3-2a_2=3a_1 \Rightarrow a_3=3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$,

$n=2, a_4-2a_3=3a_2 \Rightarrow a_4=3\times\frac{3}{2}+2\times\frac{9}{2}=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$,

$\therefore a_3+a_4=\frac{9}{2}+\frac{27}{2}=\frac{36}{2}=18$,正确;

②由(*)知 $a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)$.$\therefore$首项 $a_1+a_2\neq0, q=3\neq0$,$\therefore\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列,正确;

③$a_{n+2}-3a_{n+1}=-1(a_{n+1}-3a_n)$.首项 $a_2-3a_1=\frac{3}{2}-3\times\frac{1}{2}=0$,不符合等比数列的定义,错误;

④解法一:由②对可知:$a_n+a_{n-1}=2\times3^{n-2}$,

两边同除 3^n 得 $\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{2}{9}$,

令 $\frac{a_n}{3^n}=b_n$,$\therefore b_n+\frac{1}{3}b_{n-1}=\frac{2}{9}\Rightarrow b_n=-\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{2}{9}$, $n\geqslant2$.

$\therefore b_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\left(b_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$,

$b_1-\frac{1}{6}=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{6}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$,即数列$\left\{b_n-\frac{1}{6}\right\}$是恒为 0 的常数列.

$\therefore b_n-\frac{1}{6}=0\Rightarrow\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow a_n=\frac{1}{6}\cdot3^n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$,故错误.

解法二:由③知:$a_n-3a_{n-1}=0\Rightarrow a_n=3a_{n-1}$,$\because a_1=\frac{1}{2}\neq0, q=3\neq0$,

$\therefore\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,3 为公比的等比数列.

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$. 故错误.

故选 B.

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. -6 【解析】因为 $f'(x)=3+\sin x$, $f'(0)=3$,所以在$(0,f(0))$处的切线的斜率为 3,因为切线与直线 $2x-my+1=0$ 互相垂直,$y=\frac{2}{m}x+\frac{1}{m}$,所以$\frac{2}{m}\times3=-1$,解得 $m=-6$.

14. 11

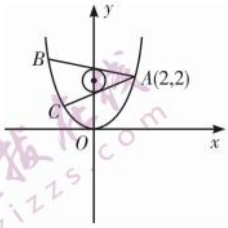
15. 3 或 4 【解析】设公比为 q,则 $q=\frac{a_2-a_4}{a_1-a_3}=3$,$\therefore a_1-a_3=-8a_1=-\frac{8}{27}$,

$\therefore a_1=\frac{1}{27}, a_2=\frac{1}{9}, a_3=\frac{1}{3}, a_4=1,\cdots$,

$\therefore n=3$ 或 4 时,$a_1a_2\cdots a_n$ 取得最小值.

数学(理科)参考答案一 2

16. $6x+3y+4=0$ 【解析】设 $B\left(x_1,\frac{x_1^2}{2}\right)$，$C\left(x_2,\frac{x_2^2}{2}\right)$，



$\therefore l_{AB}:(x_1+2)x-2y-2x_1=0$，

$\because$ 圆心到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-4-2x_1|}{\sqrt{(x_1+2)^2+4}}=1$，$\therefore 3x_1^2+12x_1+8=0\Rightarrow 6x_1+3y_1+4=0$，

同理：$6x_2+3y_2+4=0$，

$\therefore l_{BC}:6x+3y+4=0$.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.【解析】(1) $\because \cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC=-\frac{1}{7}$，…… 1 分

在△ABD 中，由余弦定理得 $8^2=BD^2+7^2-2\cdot BD\cdot 7\cdot\cos\angle ADB$，…… 3 分

$\Rightarrow BD=3$ 或 -5(舍). …… 4 分

(2)由已知 $\sin\angle ADC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\sin\angle CAD=\frac{1}{2}$，…… 6 分

$\therefore \sin C=\sin(\angle ADC+\angle CAD)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{14}$，…… 8 分

由正弦定理得 $CD=\frac{AD\sin\angle CAD}{\sin C}=\frac{7\times\frac{1}{2}}{\frac{13}{14}}=\frac{49}{13}$，…… 10 分

$\therefore BC=3+\frac{49}{13}=\frac{88}{13}$，…… 11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{88}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{176\sqrt{3}}{13}$. …… 12 分

18.【解析】(1)由题意，随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3. …… 1 分

由事件的独立性得 $P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$，…… 2 分

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，…… 3 分

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$，…… 4 分

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，…… 5 分

所以“梦之队”第一轮得分 X 的分布列如下

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

…… 6 分

$E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{1}{4}=\frac{23}{12}$. …… 8 分

(2)设"梦之队"三轮得分之和为4分为事件A.

$\therefore P(A)=C_3^1\frac{11}{24}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+C_3^1\frac{1}{4}\times C_2^1\frac{1}{4}\times\frac{1}{24}+C_3^2\left(\frac{11}{24}\right)^2\times\frac{1}{24}=\frac{589}{4608}$. ………………………………………………………… 12分(三种情形,每种1分,结果1分)

19.【解析】(1)$\because CD/\!/AB$,$AB\subset$平面ABE,$CD\not\subset$平面ABE,

$\therefore CD/\!/$平面ABE, …………………………………… 2分

$\because CD\subset$平面ECD,设平面$ABE\cap$平面$ECD=l$,

$\therefore l/\!/CD$,

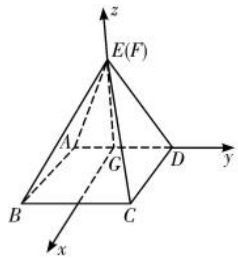
$\because l\not\subset$平面$ABCD$,$CD\subset$平面$ABCD$,

$\therefore l/\!/$平面$ABCD$, …………………………………… 4分

即平面ABE与平面ECD的交线平行底面$ABCD$. …………………………………… 5分

注:将四棱锥补全成柱体亦可得证.

(2)如图建立空间直角坐标系.



则$E\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$,$C\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$D\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, ………………… 7分

$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{EC}=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$,

设平面EBC的法向量为$\boldsymbol{n}_1$,平面ECD的法向量为$\boldsymbol{n}_2$,

$\therefore \boldsymbol{n}_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$, …………………………………… 9分

$\boldsymbol{n}_2=(0,\sqrt{3},1)$, …………………………………… 10分

$\therefore \cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}\cdot 2}=\frac{\sqrt{7}}{7}$, …………………………………… 11分

$\therefore$二面角$B-EC-D$的余弦值为$-\frac{\sqrt{7}}{7}$. …………………………………… 12分

20.【解析】(1)设直线l的方程为$y=k(x+1)(k>0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$得$(3k^2+1)x^2+6k^2x+3k^2-3=0$, …………………………………… 1分

由题意知$\Delta>0$恒成立,

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1}$,所以$y_1+y_2=\frac{2k}{3k^2+1}$, …………………………………… 2分

由于E为线段AB的中点,因此$x_E=-\frac{3k^2}{3k^2+1}$,$y_E=\frac{k}{3k^2+1}$, …………………………………… 3分

此时$k_{OE}=\frac{y_E}{x_E}=-\frac{1}{3k}$.

所以OE所在直线方程为$y=-\frac{1}{3k}x$, …………………………………… 4分

又由题设知$D(-3,m)$,令$x=-3$,得$m=\frac{1}{k}$, …………………………………… 5分

即$mk=1$. …………………………………… 6分

(2)由(1)知 OE 所在直线的方程为 $y=-\frac{1}{3k}x$,将其代入椭圆 C 的方程,并由 $k>0$,

解得 $G\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2+1}}\right)$, ………………………… 8 分

又 $E\left(-\frac{3k^2}{3k^2+1},\frac{k}{3k^2+1}\right)$, ………………………… 9 分

由 $|OG|^2=|OE|\cdot|OF|$ 得:$x_G^2=x_E\cdot x_F\Rightarrow x_F=\frac{x_G^2}{x_E}=\frac{\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2+1}}\right)^2}{-\frac{3k^2}{3k^2+1}}=-3$, ………………………… 11 分

因此,点 F 在定直线 $x=-3$ 上. ………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=\sqrt{3}-2\cos x$,令 $f'(x)=0$,得 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 1 分

故在区间 $[0,\pi]$ 上,$f'(x)$ 的唯一零点是 $x=\frac{\pi}{6}$, ………………………… 2 分

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减, ………………………… 3 分

当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增, ………………………… 4 分

故在区间 $[0,\pi]$ 上,$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\sqrt{3}-2$, ………………………… 5 分

(2)要证:当 $x>0$ 时,$\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1>\frac{\sqrt{3}-1}{e^{\sqrt{3}x}}+(\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}-2)\sin x$,

即证:当 $x>0$ 时,$h(x)=(x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}x}>\sqrt{3}-1$. ………………………… 6 分

$h'(x)=(1-\sqrt{3}\cos x)e^{\sqrt{3}x}+\sqrt{3}(x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}x}=(\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x}$,

………………………… 7 分

令 $\varphi(x)=\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}$,

$\therefore\varphi'(x)=\sqrt{3}-3\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………… 8 分

$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时,$x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$,$\therefore\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,$\therefore\varphi'(x)<0$,

$\therefore x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 时,$x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\therefore\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$,$\therefore\varphi'(x)>0$,

$\therefore\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 上单调递增, ………………………… 9 分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+4-\sqrt{3}=1+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\sqrt{3}>0$, ………………………… 10 分

所以 $x\in(0,\pi]$ 时,$\varphi(x)>0$,

而 $x\in(\pi,+\infty)$ 时,$\varphi(x)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4-\sqrt{3}>\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}+4-\sqrt{3}>0$,

综上,$x>0$ 时,$\varphi(x)>0$,即 $h'(x)>0$,即 $h(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数, ………………………… 11 分

$\therefore h(x)>h(0)=\sqrt{3}-1$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\alpha, \end{cases}$ 所以 C_1 是圆心为 $(0,2\sqrt{3})$，半径为 $2\sqrt{3}$ 的右半圆，所以 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2\sqrt{3})^2=12(x\geqslant 0)$，…… 2分

由 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\sin\theta=0$，

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{3}\sin\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. …… 5分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，$\because\theta=\gamma$，$\therefore|OM|=4\sqrt{3}\sin\gamma$，$|ON|=4\cos\gamma$，…… 6分

$|MN|=||OM|-|ON||=|4\sqrt{3}\sin\gamma-4\cos\gamma|$，…… 7分

$|MA|=|OA|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=4\sqrt{3}\cos\gamma$，…… 8分

因为 $|MN|=\sqrt{3}|MA|$，所以 $|4\sqrt{3}\sin\gamma-4\cos\gamma|=\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\cos\gamma\Rightarrow\tan\gamma=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$（舍）.

所以 $\tan\gamma=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …… 10分

23.【解析】(1)当 $x\geqslant 0$ 时，不等式化为 $\begin{cases} 2x-(x+2)\leqslant 1, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $0\leqslant x\leqslant 3$；

当 $-2<x<0$ 时，不等式化为 $\begin{cases} -2x-(x+2)\leqslant 1, \\ -2<x<0, \end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<0$；

当 $x\leqslant -2$ 时，不等式化为 $\begin{cases} -2x+(x+2)\leqslant 1, \\ x\leqslant -2, \end{cases}$ 无解.

综上，原不等式的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$. …… 5分

(2)由已知可得 $f(x)-\cos x\geqslant a\Rightarrow(f(x)-\cos x)_{\min}\geqslant a$，…… 6分

$\because f(x)=|x|+|x|-|x+2|\geqslant|x|-|x-(x+2)|=|x|-2\geqslant-2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，…… 8分

又 $-\cos x\geqslant-1$，当且仅当 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时等号成立，…… 9分

综上，可知 $f(x)-\cos x\geqslant-3$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

所以 $a\leqslant-3$. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》