高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的交集，考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=\{x|-2<x\leqslant 1\}$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $z=\frac{1-4i^3}{1-i}=\frac{1+4i}{1-i}=\frac{(1+4i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3+5i}{2}$，所以复数 z 的实部与虚部分别是 $-\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$，则复数 z 的实部与虚部之和为 $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$.

3. D 【解析】本题考查抽样方法，考查数据分析的核心素养.

由题意可知得到的样本编号依次为 12，06，01，16，19，10，07，44，39，38，则得到的第 8 个样本编号是 44.

4. B 【解析】本题考查等比数列的性质与充要条件，考查逻辑推理的核心素养.

由 $a_1+a_3=2$，$a_3+a_5=6$，得 $q^2=\frac{a_3+a_5}{a_1+a_3}=3$，则 $q=\pm\sqrt{3}$；由 $a_1+a_3=2$，$q=\sqrt{3}$，得 $a_3+a_5=(a_1+a_3)q^2=6$. 故“$a_3+a_5=6$”是“数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\sqrt{3}$”的必要不充分条件.

5. A 【解析】本题考查椭圆，考查直观想象的核心素养.

设 $P(m,n)$，则 $\begin{cases} m^2+n^2=5, \\ \frac{m^2}{8}+\frac{n^2}{2}=1, \end{cases}$ 解得 $|n|=1$，故 $\triangle PAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$.

6. C 【解析】本题考查基本不等式，考查数学建模的核心素养.

设 $|AB|=x$ 米，则种植花卉区域的面积 $S=(x-4)(\frac{1800}{x}-2)=-2x-\frac{7200}{x}+1808$. 因为 $x>0$，所以 $2x+\frac{7200}{x}\geqslant 2\sqrt{14400}=240$，当且仅当 $x=60$ 时，等号成立，则 $S\leqslant -240+1808=1568$，即当 $|AB|=60$ 米，$|BC|=30$ 米时，种植花卉区域的面积取得最大值，最大值是 1568 平方米.

7. A 【解析】本题考查三角函数的图象与性质，考查数形结合的数学思想.

由题意可得 $f(x)=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$. 因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}]$，则 $3\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<4\pi$，解得 $\frac{17}{12}\leqslant\omega<\frac{23}{12}$.

8. D 【解析】本题考查导数的应用，考查函数与方程的数学思想.

设 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 0$，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $f(0.1)=e^{0.1}-e^{-0.1}-0.2>f(0)=0$，即 $a>c$. 设 $g(x)=2x-2\ln(1+x)$，则 $g'(x)=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}>0$，从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(0.1)=0.2-2\ln 1.1=0.2-\ln 1.21>g(0)=0$，即 $c>b$. 综上，$b<c<a$.

9. ABD **【解析】本题考查平面向量,考查数学运算的核心素养.**

由题意可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+1\times3=1$,则 A 正确. 因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,3)$,所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(5,-1)$,所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$,则 B 正确. 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量是 $(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$,则 C 错误. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $\frac{1}{10}\boldsymbol{b}$,则 D 正确.

10. AB **【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查直观想象的核心素养.**

由题意可知直线 l 过定点 $A(-2,2)$,圆心 C 的坐标为 $(0,1)$,半径为 3,则点 A 在圆 C 内,从而直线 l 与圆 C 一定相交,故 A,B 正确. 设圆心 C 到直线 l 的距离为 d,则 $d\leqslant|AC|=\sqrt{5}$,则 C 错误. 因为圆心 C 到直线 $x=-2$ 的距离为 2,而直线 l 的斜率一定存在,所以使得圆心 C 到直线 l 的距离为 2 的直线 l 有且仅有 1 条,则 D 错误.

11. AD **【解析】本题考查三棱锥,考查直观想象和数学建模的核心素养.**

由 $AB=AP$,得 $AB=AP=3$,则三棱锥 $P-ABC$ 的体积是 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3^2\times3=\frac{9}{2}$,故 A 正确. 设三棱锥 $P-ABC$ 的内切球半径为 r,则 $\frac{1}{3}\times[\frac{1}{2}\times3^2\times3+\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2]r=\frac{9}{2}$,解得 $r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$,从而三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的球心到点 A 的距离 $d=\sqrt{3}r=\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$,故 B,C 错误. 设 $AB=x$,则 $PA=6-x$,故三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot PA=\frac{1}{6}x^2(6-x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2$. 设 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2(0<x<6)$,则 $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x(0<x<6)$. 由 $f'(x)>0$,得 $0<x<4$,由 $f'(x)<0$,得 $4<x<6$. 则 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递增,在 $(4,6)$ 上单调递减,从而 $f(x)_{\max}=f(4)=\frac{16}{3}$,即三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值是 $\frac{16}{3}$,此时 $x=4$,即 $AB=AC=4$,$PA=2$. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC,$AB\perp AC$,所以三棱锥外接球的半径 $R=\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{2}})^2+(\frac{2}{2})^2}=3$,则三棱锥外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$,故 D 正确.

12. ABD **【解析】本题考查函数与导数,考查逻辑推理的核心素养.**

因为 $g(x+2)$ 是奇函数,所以 $g(2)=0$. 因为 $f(x)+g(x-2)=1$,所以 $f(4)+g(2)=1$,所以 $f(4)=1$,则 A 正确. 因为 $f(x)+g(x-2)=1$,所以 $f'(x)+g'(x-2)=0$,所以 $f'(x+2)+g'(x)=0$,所以 $g'(2-x)+g'(x)=0$,则 $g'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,则 B 正确. 因为 $f'(x+2)=g'(2-x)$,所以 $f'(x+2)-g'(2-x)=0$,所以 $f(x+2)+g(2-x)=c$(c 为常数),所以 $f(x)+g(4-x)=c$(c 为常数). 因为 $f(x)+g(x-2)=1$,所以 $g(x-2)-g(4-x)=1-c$. 令 $x=3$,得 $g(1)-g(1)=1-c=0$,所以 $c=1$,则 $g(x-2)=g(4-x)$. 因为 $g(x+2)$ 是奇函数,所以 $g(x+2)=-g(-x+2)$,所以 $g(x-2)=-g(-x+6)$,所以 $g(4-x)=-g(-x+6)$,所以 $g(x)=-g(x+2)$,所以 $g(x)=g(x+4)$,即 $g(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 因为 $f(x)+g(x-2)=1$,所以 $f(x)=1-g(x-2)$,所以 $f(x+4)=1-g(x+2)$,所

以 $f(x)=f(x+4)$,即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 因为 $g(2)=0$,所以 $g(4)=0$,$g(1)=-g(3)$,所以 $f(2)=f(4)=1$,$f(1)=1-g(3)=1+g(1)$,$f(3)=1-g(1)$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$,$f(1)g(2)+f(2)g(3)+f(3)g(4)+f(4)g(5)=0$,故 $\sum_{k=1}^{2024}f(k)=2024$,$\sum_{k=1}^{2024}f(k)g(k+1)=0$,即 C 错误,D 正确.

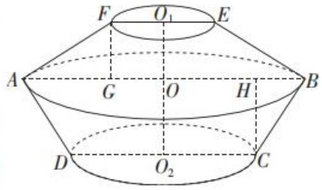
13. -4 **【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象的核心素养.**

由题意可得 $f(x+1)=2(x+1)^2+a(x+1)+2=2x^2+(a+4)x+a+4$. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以 $a+4=0$,解得 $a=-4$.

14. 8.75 **【解析】本题考查随机变量的期望,考查数据分析的核心素养.**

由题意可得该销售商销售每件零件获利的期望是 $10\times0.95-15\times0.05=8.75$ 元,则该销售商销售该零件 10000 件,获利的期望为 $8.75\times10000=87500$ 元,即8.75 万元.

15. $(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ **【解析】本题考查数学文化与立体几何,考查直观想象的核心素养.**



如图,作 $FG\perp AB$,垂足为 G,作 $CH\perp AB$,垂足为 H. 由题意可得 $O_1F=4$,$OA=10$,$O_2C=6$,则 $AG=6$,$BH=4$. 由题意可知 $FG:CH=3:4$,则 $FG=6$,$CH=8$. 从而 $AF=6\sqrt{2}$,$BC=4\sqrt{5}$,故该汝窑双耳罐的侧面积为 $\pi\cdot AF\cdot(O_1F+OA)+\pi\cdot BC\cdot(O_2C+OA)=(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ 平方厘米.

16. $3+\sqrt{7}$ **【解析】本题考查双曲线的离心率,考查直观想象的核心素养.**

由题意可知 $\angle NF_1O=60°$,$\angle ONF_1=90°$,$|OF_1|=c$,则 $|NF_1|=\frac{1}{2}c$. 因为 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{NF_1}$,所以 $|MN|=\frac{5}{2}c$,所以 $|MF_1|=3c$,则 $|MF_2|=3c-2a$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中,由余弦定理可得 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\angle MF_1F_2$,即 $(3c-2a)^2=(3c)^2+(2c)^2-2\times3c\times2c\times\frac{1}{2}$,整理得 $c^2-6ac+2a^2=0$,即 $e^2-6e+2=0$,解得 $e=3+\sqrt{7}$.

17. 解:(1)年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的非"编织巧手"有 5 人,

年龄在 40 周岁以下的"编织巧手"有 6 人.

列联表如下:

	"编织巧手"	非"编织巧手"	总计
年龄≥40 岁	19	5	24
年龄<40 岁	6	10	16
总计	25	15	40

…………………………………………………………………………………… 3 分

零假设为 H_0:"编织巧手"与"年龄"无关联.

根据列联表中的数据,经计算得到 $\chi^2=\frac{40\times(19\times10-6\times5)^2}{24\times16\times25\times15}\approx7.111>6.635=x_{0.010}$,

根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为“编织巧手”与“年龄”有关，此推断犯错的概率不大于 0.010. …… 5 分

(2)由题意可得这 6 人中年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的人数是 2；年龄在 40 周岁以下的人数是 4. …… 7 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的情况有 $C_6^2=15$ 种， …… 8 分

其中符合条件的情况有 $C_4^1C_2^1=8$ 种， …… 9 分

故所求概率 $P=\frac{8}{15}$. …… 10 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，直接补充完整 2×2 列联表，没有计算过程，只要答案正确，不予扣分；

(2)在第(2)问中，算出 40 周岁以上(含 40 周岁)和 40 周岁以下的人数，得 2 分，求出总的基本事件数和事件包含的基本事件数的个数，各得 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)因为 $5\cos 2B-14\cos B=7$，所以 $5(2\cos^2B-1)-14\cos B-7=0$， …… 1 分

所以 $5\cos^2B-7\cos B-6=0$，即 $(5\cos B+3)(\cos B-2)=0$， …… 3 分

解得 $\cos B=-\frac{3}{5}$. …… 4 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4}{5}$. …… 6 分

(2)由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=41$，则 $b=\sqrt{41}$. …… 8 分

设△ABC 的边 AC 上的高为 h.

因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$，所以 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{5\times2\times\frac{4}{5}}{\sqrt{41}}=\frac{8\sqrt{41}}{41}$. …… 10 分

因为 B 是钝角，所以当 $BD\perp AC$ 时，垂足在边 AC 上，即 BD 的最小值是 $\frac{8\sqrt{41}}{41}$. …… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，求出 $\cos B=-\frac{3}{5}$，得 4 分，没有说明 $0<B<\pi$，不扣分；

(2)在第(2)问中，求出△ABC 的边 AC 上的高 $h=\frac{8\sqrt{41}}{41}$，累计得 10 分，没有说明 BD 的最小值是边 AC 上的高，直接得出 BD 的最小值为 $\frac{8\sqrt{41}}{41}$，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

19. 解：(1)选①，因为 $S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\,(n\geqslant2)$，所以 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1(n\geqslant2)$， … 2 分

则 $\sqrt{S_n}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列， …… 4 分

从而 $\sqrt{S_n}=n$，故 $S_n=n^2$. …… 6 分

选②，因为$(n-1)\sqrt{S_n}=n\sqrt{S_{n-1}}(n\geqslant 2)$，所以$\sqrt{S_n}=\frac{n}{n-1}\sqrt{S_{n-1}}(n\geqslant 2)$， …………… 2分

所以$\sqrt{S_n}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot\sqrt{S_1}=n(n\geqslant 2)$，则$S_n=n^2(n\geqslant 2)$. ……………… 5分

因为$S_1=a_1=1$满足上式，所以$S_n=n^2$. ……………………………………………… 6分

(2)由(1)可得$b_n=(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{n^2+n}=(-1)^n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$， ………………………………… 8分

则$T_{2n}=-(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-\cdots-(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1})$

$=-1+\frac{1}{2n+1}=-\frac{2n}{2n+1}$. ………………………………………………………… 12分

评分细则：

(1)在第(1)问中，若选择条件②，没有考虑$n=1$，扣1分；

(2)在第(2)问中，最后结果写成$\frac{1}{2n+1}-1$，不扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

20.(1)证明：取AD的中点H，连接EH，FH.

因为F，H分别是棱PA，AD的中点，所以$HF/\!/PD$. ……………………………… 1分

因为$PD\subset$平面PCD，$HF\not\subset$平面PCD，所以$HF/\!/$平面PCD. ………………………… 2分

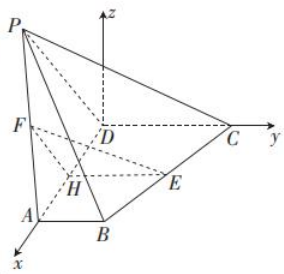
因为E，H分别是棱BC，AD的中点，所以$HE/\!/CD$. ………………………………………… 3分

因为$CD\subset$平面PCD，$HE\not\subset$平面PCD，所以$HE/\!/$平面PCD. ……………………………… 4分

因为HE，$HF\subset$平面HEF，且$HE\cap HF=H$，所以平面$HEF/\!/$平面PCD. ………… 5分

因为$EF\subset$平面HEF，所以$EF/\!/$平面PCD. ………………………………………… 6分

(2)解：以D为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$的方向为x，y轴的正方向，垂直平面$ABCD$向上的方向为z轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设$AB=1$，则$AD=CD=PD=2$，$PC=2\sqrt{3}$.

由余弦定理可得$\cos\angle PDC=\frac{4+4-12}{2\times 2\times 2}=-\frac{1}{2}$，则$\angle PDC=120^\circ$，

从而$A(2,0,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,-1,\sqrt{3})$，$E(1,\frac{3}{2},0)$，$F(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

故$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,\frac{\sqrt{3}}{2})$. ………………………… 8分

设平面PAD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=-y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令$y=\sqrt{3}$，得$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$. ………………………………… 10分

设直线EF与平面PAD所成的角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{EF}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{4+\frac{3}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$,

即直线 EF 与平面 PAD 所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$. ……………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中,也可以连接 AE,并延长交 CD 于 M,连接 PM,易证 EF 是$\triangle APM$ 的中位线,从而得到 $EF/\!/PM$,进而证出 $EF/\!/$平面 PCD;

(2)在第(2)问中,也可以先求出 EF 的长,再通过等体积法求出点 E 到平面 PAD 的距离 d,从而求出直线 EF 与平面 PAD 所成角的正弦值为$\dfrac{d}{EF}$;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

21. 解:(1)由题意可得 $|AB|=|BF|$,即点 B 到点 F 的距离等于点 B 到直线 l_1 的距离. …… ……………………………………………………………………………………………… 1 分

因为 $|EF|=4$,所以 l_1 的方程为 $x=-2$,$F(2,0)$. ………………………………………… 2 分

则点 B 的轨迹 C 是以 F 为焦点,直线 $l_1:x=-2$ 为准线的抛物线, ……………………… 3 分

故点 B 的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$. ……………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率不为 0,则设直线 $l:x=my+n$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=8x,\end{cases}$整理得 $y^2-8my-8n=0$.

则 $\Delta=64m^2+32n>0$,从而 $y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=-8n$. ……………………………… 5 分

故 $|MN|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{64m^2+32n}$.

由题意可得 $Q(2,-4)$,则点 Q 到直线的距离 $d=\dfrac{|2+4m-n|}{\sqrt{m^2+1}}$,

故$\triangle PMN$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot|2+4m-n|\cdot\sqrt{64m^2+32n}$. ……………… 7 分

因为以线段 MN 为直径的圆恒过点 P,所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$,

即 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-4)(y_2-4)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$.

因为 $x_1=\dfrac{y_1^2}{8}$,$x_2=\dfrac{y_2^2}{8}$,所以$\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}-\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$,

即$\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}-\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$, ……………………………… 9 分

所以 $n^2-16m^2-12n-32m+20=0$,即 $n^2-12n+36=16m^2+32m+16$,即 $(n-6)^2=16(m+1)^2$,所以 $n-6=\pm4(m+1)$,即 $n=4m+10$ 或 $n=-4m+2$.

因为直线 l 不经过点 P,所以 $n\neq-4m+2$,所以 $n=4m+10$, …………………………… 11 分

则 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|2+4m-n|\cdot\sqrt{64m^2+32n}=32\sqrt{(m+1)^2+4}=64\sqrt{2}$,解得 $m=1$ 或 $m=-3$,

故直线 l 的斜率为 1 或 $-\frac{1}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，也可以设 $B(x,y)$，再由 $|AB|=|BF|$，得到 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$，从而得到点 B 的轨迹 C 的方程；

(2)在第(2)问中，也可以设直线 $l:y=kx+m$，得到 k 和 m 的等量关系，再求出△QMN 面积的表达式，从而求出△QMN 面积的取值范围，再求出直线 l 的斜率不存在时，△QMN 的面积，从而得出△QMN 面积的最小值，若直线方程用斜截式表示，没有考虑斜率不存在的情况，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

22. 解：(1)由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-ax=\frac{-ax^2-ax+1}{x+1}$.
………………………………………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $-ax^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2+4a=a(a+4)$.

当 $\Delta\leqslant 0$，即 $-4\leqslant a<0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. ………………… 2 分

当 $\Delta>0$，即 $a>0$ 或 $a<-4$ 时，$f'(x)=0$ 有两个根 $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$，$x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

若 $a>0$，$x_1<-1$，$x_2>0$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减； ……………………………………… 3 分

若 $a<-4$，$x_1>x_2\in(-1,+\infty)$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 或 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………………… 4 分

综上，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减；当 $-4\leqslant a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<-4$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 和 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_2,x_1) 上单调递减. …………………………………………………………………… 5 分

(2)对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $f'(x)\leqslant g(x)$ 等价于对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$. 设 $h(x)=2axe^x-\sin x$，则 $h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$. …………………… 6 分

若 $a<0$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $a<0$ 不符合题意. ……… 7 分

当 $a>0$ 时，设 $m(x)=h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$，则 $m'(x)=2a(x+2)e^x+\sin x$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，所以 $m'(x)>0$，则 $m(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，即 $h'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，且 $h'(0)=2a-1$. ……………………………………………………………… 8 分

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1<0$，$h'(\frac{\pi}{2})=2a(\frac{\pi}{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}}>0$，则存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$. 当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，则 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 不符合题意. ……………………… 9 分

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1\geqslant0$，$h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即对任意的 $x\in[0,\pi]$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 恒成立；

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$h(x)=2axe^x-\sin x\geqslant2a\pi e^\pi-1\geqslant\pi e^\pi-1>0$，即对任意的 $x\in(\pi,+\infty)$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意. ………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},+\infty)$. ………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，只要分类讨论情况正确，没有把最后结果写在一起，不扣分；

(2)在第(2)问中，将不等式转化为对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 并求导正确，得 1 分，讨论出 a 的取值范围，累计得 11 分，漏掉最后一步，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.