文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	A	A	B	D	D	C	B	A	B	B

【解析】

1．$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，故选 A.

2．$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，故选 C.

3．由题 $a>c>0$，$b>c>0\Rightarrow a+b>2c>c$，即 $a>b>c>0\Rightarrow a+b>c$，反之，由 $a+b>c$ 推不出 $a>b>c>0$，例如 $a=1$，$b=1$，$c=0$，故选 A.

4．$S=-1+2-3+\cdots+2020-2021=-1011$，故选 A.

5．依题意，命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+(a-1)x_0+1<0$”是假命题，则该命题的否定“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-(a-1)x+1\geqslant 0$”是真命题，所以 $\Delta=(a-1)^2-4\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$，故选 B.

6．根据所述规则，☰☰表示的二进制下的数为 011001，其表示的十进制下的数为 $0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0=25$，故选 D.

7．C：$x^2=4y$，$F(0,\ 1)$，设 $A\left(x_1,\ \dfrac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\ \dfrac{x_2^2}{4}\right)$，设直线 l_{AB}：$y=kx+1$，联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{16k^2+16}=2\sqrt{k^2+1}\geqslant 2$，当 $k=0$ 时，三角形 OAB 面积的最小值为 2，故选 D.

8．由图知 $\dfrac{5\pi}{12}$，$\dfrac{11\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的两个相邻的零点，设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，所以 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $T=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，故①正确；$A=1$，$\dfrac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 单调增区间上的一个零点，所以 $2\cdot\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，由于 $\pi>\varphi>0$，所以 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以②正确，⑤正确；$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，所以 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点，故③错误；因为 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴，而 $\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7\pi}{12}\right)$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7\pi}{12}\right)$ 上不单调，故④错误，故选 C.

9．因为3，15，21是等差数列$\{a_n\}$中的项，所以它们的差6，12和18应是d的整数倍，故6是d的整数倍，而$30-21=9$，9不能被6整除，所以$d=\pm 6$或$d=\pm 2$时，30都不是数列中的项，所以命题p错误，对于命题q，因为$\{a_n\}$是等差数列，由$S_{2n}=4S_n$得，$2na_1+\dfrac{2n(2n-1)}{2}d=4\left[na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d\right]\Rightarrow d=2a_1$，所以当$d$为偶数，例如当$d=2$时，存在$a_1=\dfrac{d}{2}$满足条件.故命题$q$正确，故选B.

10．函数$f(x)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}{e^2}\right)=\ln[\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)]-2$，由于$f(x)+f(-2-x)=[\ln\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)]+\ln[\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)]-4=-4$，故$f(x)$关于$(-1，-2)$对称且$f(-1)=-2$，所以$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(2)+f(3)=9f(-1)=-18$，故选A.

11．$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin\angle APB=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot|PA|\cdot|PB|=\sqrt{3}$，$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PC|\cdot\sin\angle APC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot|PA|\cdot|PC|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot|PB|\cdot|PC|\cdot\sin\angle BPC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot|PB|\cdot|PC|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，解得$|PA|=|PB|=2$，$|PC|=3$，由余弦定理可得$|AC|=|BC|=\sqrt{7}$，$|AB|=2$，取$AB$的中点$D$，连接$PD$，$CD$，可得$PD\perp AB$，$CD\perp AB$，$PD=\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{6}$，$|PD|^2+|CD|^2=|PC|^2$，所以$PD\perp CD$，所以$PD\perp$平面$ABC$，内切球半径$=\dfrac{3V_{P-ABC}}{S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{7}$，故选B.

12．$f(x)=e^x$与$h(x)=\ln x$关于直线$y=x$对称，所以函数$f(x)=e^x$与$g(x)=ax-1$的图象上恰好存在唯一一对关于直线$y=x$对称的点等价于函数$h(x)=\ln x$与$g(x)=ax-1$恰好存在唯一交点，$\ln x=ax-1$，$a=\dfrac{\ln x+1}{x}$，设$F(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，$F'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，在$(0，1)$上，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，在$(1，+\infty)$上，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，$F(1)=1$，当$x\to 0$时，$F(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$F(x)\to 0$，如图1所示，故$a=1$或$a\leqslant 0$满足条件，故选B.

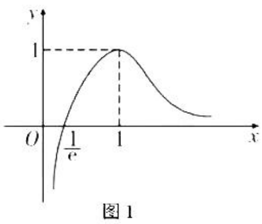

图1

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$-\dfrac{1}{2}$	10	$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$	$\dfrac{\pi}{6}$，$8(2-\sqrt{3})$

【解析】

13．$\overrightarrow{AB}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(\lambda-1,\ 2+\lambda)$，$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{AB}$，$\therefore 2+\lambda=1-\lambda$，$\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

14．由题，设 n 个单位时间时，累计细菌 A 的数目为 S_n，则 $S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，由 $S_n\geqslant 914$，得 $2^n\geqslant 915$，解得正整数 $n\geqslant 10$，故至少需要 10 个单位时间.

15．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_1,\ 0)$，$D(x,\ y)$，$\angle AOC=\theta$，$\begin{cases}x=x_1=2\cos\theta,\\ y=y_2=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数），

所以点 D 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

16．在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=16(\sqrt{3}+2)$ $=8(4+2\sqrt{3})=8(1+\sqrt{3})^2$，则 $AC=2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$，根据正弦定理有 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{7\pi}{12}}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，所以 $\sin\angle ACB=\dfrac{1}{2}$，$\angle ACB\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$；设 $\angle CBD=\theta$，$\theta\in\left[0,\ \dfrac{5\pi}{12}\right]$，则 $\angle BDC=\dfrac{5\pi}{6}-\theta$，$\angle BEC=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $BD=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\theta\right)}$，在 $\triangle BCE$ 中，由正弦定理得 $BE=\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$，则

$S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot BE\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=2\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}\right)=\dfrac{8}{\sqrt{3}+2\sin 2\theta}$，由于 $\theta\in\left[0,\ \dfrac{5\pi}{12}\right]$，则 $2\theta\in\left[0,\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$，则 $\sin 2\theta\in[0,\ 1]$，当 $\sin 2\theta=1$ 时，$S_{\triangle BDE}$ 有最小值，最小值为 $\dfrac{8}{\sqrt{3}+2}=8(2-\sqrt{3})$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

（1）证明：由题得 $a_1=2$，$a_2=2\times(2+1+1)=8$，

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

据此 $a_n=2(S_{n-1}+n)(n\geqslant2)$，

上述两式相减得 $a_{n+1}=3a_n+2$，经检验，当 $n=1$ 时，$a_{n+1}=3a_n+2$ 也成立，

所以 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)(n\geqslant1)$，即 $b_{n+1}=3b_n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列． ……………………………………（6 分）

（2）解：由（1）可得 $b_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

则 $T_n=1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\cdot3^n$，将此式两边同时乘以 3，

得 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\cdot3^{n+1}$，

上述两式错位相减得，$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$，

化简得，$T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$． ……………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由容斥原理可得，$28=15+8+14-3-3-X\Rightarrow X=3$． ……………………（3 分）

（2）由（1）及题意得，$Y=15-3-X\Rightarrow Y=9$， ………………………………………（6 分）

因为男生比女生多 1 人，所以男生 5 人、女生 4 人，

设这 5 名男生分别为：甲，A_1，A_2，A_3，A_4，这 4 名女生分别为：乙，B_1，B_2，B_3，

从这 5 名男生和 4 名女生中各随机选出 1 人，有(甲，乙)，(甲，B_1)，(甲，B_2)，(甲，B_3)，

(A_1，乙)，(A_1，B_1)，(A_1，B_2)，(A_1，B_3)，(A_2，乙)，(A_2，B_1)，(A_2，B_2)，(A_2，B_3)，(A_3，乙)，

(A_3，B_1)，(A_3，B_2)，(A_3，B_3)，(A_4，乙)，(A_4，B_1)，(A_4，B_2)，(A_4，B_3)，共 20 种选法，

其中男生甲被选中且女生乙未被选中的选法有 3 种，

故所求概率 $P=\dfrac{3}{20}$． ……………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：选①：如图 2，连接 BD， EF，

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以 $AC\perp BD$；

因为 E，F 分别是棱 BC，CD 的中点，

所以 $EF//BD$，则 $AC\perp EF$；

$\because PF\perp AC$， $EF\cap PF=F$，

所以 $AC\perp$ 平面 PEF， $PE\subset$ 平面 PEF，

故 $AC\perp PE$． ……………………………………………………………（6 分）

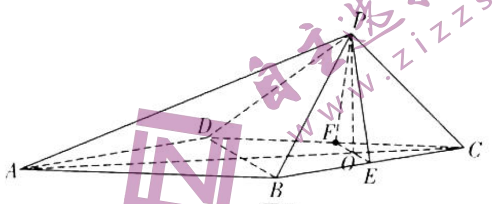

图 2

选②：如图 3，连接 BD， EF， EF 交 AC 于点 O，

平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，且两平面的交线为 EF；

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$；

因为 E，F 分别是棱 BC，CD 的中点，

所以 $EF//BD$，则 $AC\perp EF$， $AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AC\perp$ 平面 PEF， $PE\subset$ 平面 PEF，

故 $AC\perp PE$． ……………………………………………………………（6 分）

（2）解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， E， F 为 BC， CD 中点，

$\therefore AC$ 平分 BD，则 AC 平分 EF，

$\therefore O$ 为 EF 中点．

因为 $PE=PF$，所以 $PO\perp EF$；

由（1）知 $AC\perp EF$， $PO\cap AC=O$，

所以 $EF\perp$ 平面 APC，即 $BD\perp$ 平面 APC；

如图 3，连接 BD 交 AC 于点 M，连接 PM，

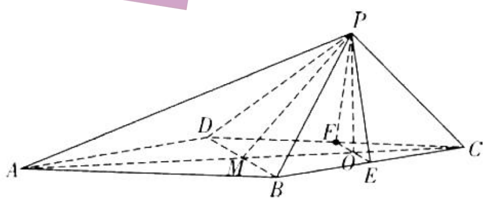

图 3

因为 $BD\perp$ 平面 APC，

所以点 B 在平面 APC 的投影点是点 M，

则 $\angle BPM$ 为所求的线面角；在 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中， $PC=3$， $CO=\sqrt{3}$， $\therefore PO=\sqrt{6}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMO$ 中， $PO=\sqrt{6}$， $OM=\sqrt{3}$， $\therefore PM=3$．

又 $BM=2$，故 $\tan\angle BPM=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\sin\angle BPM=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$． ……………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

设 $g(x)=f'(x)=a-2x+\dfrac{1}{x}-(x+1)e^x$，$g'(x)=-2-\dfrac{1}{x^2}-(x+2)e^x<0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减． ……………………………………………（4 分）

（2）由（1）得 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x\to 0$ 时，$f'(x)\to+\infty$，$f(x)\to-\infty$，

当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to-\infty$，$f(x)\to-\infty$，

所以存在 x_0 使得 $f'(x_0)=0$，即 $a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}+(x_0+1)\cdot e^{x_0}$，

在 $(0,x_0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $(x_0,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$f(x)_{\max}=f(x_0)=x_0^2-1+x_0^2\cdot e^{x_0}+\ln x_0-e$，

令 $h(x)=x^2-1+x^2\cdot e^x+\ln x-e$，$h'(x)=2x+(x^2+2x)\cdot e^x+\dfrac{1}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(1)=0$，所以 $f(x)_{\max}>0$，解得 $x_0>1$，

令 $F(x)=2x-\dfrac{1}{x}+(x+1)\cdot e^x$，$F'(x)=2+\dfrac{1}{x^2}+(x+2)\cdot e^x>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$F(1)=1+2e$，故 $a>1+2e$．

……………………………………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：设 $P(x,y)$，由题意得 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2|x-1|$，化简得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，

所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$． ……………………………………………（4 分）

（2）证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(1,y_3)$，$N(1,y_4)$，

设直线 l_{AB}：$y=k(x-4)$，且 $k>\sqrt{3}$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1, \end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2+8k^2x-16k^2-12=0$， ……………………………（6 分）

由韦达定理可得 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{k^2-3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{16k^2+12}{k^2-3}$，

由 $\frac{y_3}{3}=\frac{y_1}{x_1+2}$，解得 $y_3=\frac{3y_1}{x_1+2}=\frac{3k(x_1-4)}{x_1+2}$，

由 $\frac{y_4}{3}=\frac{y_2}{x_2+2}$，解得 $y_4=\frac{3y_2}{x_2+2}=\frac{3k(x_2-4)}{x_2+2}$，

$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=9+y_3y_4=9+\frac{9k^2(x_1-4)(x_2-4)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=9+\frac{9k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=9+\frac{9k^2(16k^2+12-32k^2+16k^2-48)}{16k^2+12+16k^2+4k^2-12}=0$，

故点 F 在以 $|MN|$ 为直径的圆上． ……………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）曲线 C 的极坐标方程为 $3(\rho\cos\theta)^2+4(\rho\sin\theta)^2=12$，即 $3x^2+4y^2=12$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……………………………………………（5 分）

（2）直线 l 的参数方程可以标准化为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m, \end{cases}$ （m为参数），

联立直线 l 的参数方程与曲线 C 的直角坐标方程得 $\dfrac{7}{2}m^2-\sqrt{2}m-5=0$，

由韦达定理知 $m_1+m_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{7}$，$m_1m_2=-\dfrac{10}{7}$，

根据 m 的几何意义知 $|PA|+|PB|=|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\sqrt{\dfrac{288}{49}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$，

所以 $|PA|+|PB|=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$. ……………………………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|2x-1|+|x-1|=\begin{cases} 3x-2,\ 1\leqslant x, \\ x,\ \dfrac{1}{2}<x<1, \\ 2-3x,\ x\leqslant\dfrac{1}{2}, \end{cases}$

则 $f(x)\leqslant 2$ 的解集为 $\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}\right\}$. ……………………………………………（5 分）

（2）$\forall x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\geqslant 3$ 恒成立，即 $f(x)_{\min}\geqslant 3$，

易知函数 $f(x)$ 的最小值只可能是 $f(a)$ 或 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 $f(a)=|2a-1|\geqslant 3$，

解得 $a\in(-\infty,\ -1]\cup[2,\ +\infty)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{1}{2}-a\right|\geqslant 3$，解得 $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2},\ +\infty\right)$，

所以 $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2},\ +\infty\right)$. ……………………………………………（10 分）