2023年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.A 【解析】复数 $z=3-4i$，则 $\bar{z}=3+4i$，$|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，

所以 $\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.故选：A

2.C 【解析】解不等式 $x^2-2x-3<0$，得 $-1<x<3$，因此 $A=\{x\in Z|-1<x<3\}=\{0,1,2\}$，

所以集合A的子集个数为 $2^3=8$.故选：C

3.B 【解析】函数 $f(x)=x-\frac{\sin x}{x^3}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

而 $f(-x)=-x-\frac{\sin(-x)}{(-x)^3}=-x-\frac{\sin x}{x^3}\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，

即函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，其图象关于原点不对称，排除选项CD；

而当 $x=\pi$ 时，$f(x)=f(\pi)=\pi$，排除选项A，选项B符合要求.故选：B

4.D 【解析】因为 θ 为第一象限角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，则 $\sin\theta>\cos\theta>0$，

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta<0$，

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{3}$，即 $1-\sin 2\theta=\frac{1}{3}$，解得 $\sin 2\theta=\frac{2}{3}$，$\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

5.C 【解析】依题意，五位正整数中 “回文数”具有：万位与个位数字相同，且不能为0；千位与十位数字相同，求有且仅有两位数字是奇数的“回文数”的个数有两类办法：

最多1个0，取奇数字有 A_5^1 种，取能重复的偶数字有 A_4^1 种，它们排入数位有 A_2^2 种，取偶数字占百位有 A_5^1 种，不同“回文数”的个数是 $A_5^1A_4^1A_2^2A_5^1=200$ 个，

最少2个0，取奇数字有 A_5^1 种，占万位和个位，两个0占位有1种，取偶数字占百位有 A_5^1 种，

不同“回文数”的个数是 $A_5^1A_5^1=25$ 个，

由分类加法计算原理知，在所有五位正整数中，有且仅有两位数字是奇数的“回文数”共有 $200+25=225$ 个.故选：C

6.A 【解析】依题意，抛物线C的焦点在x轴的正半轴上，设C的方程为：$y^2=2px, p>0$，

显然直线PQ不垂直于y轴，设直线PQ的方程为：$x=ty+2$，点$P(\frac{y_1^2}{2p},y_1),Q(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$，

由$\begin{cases}x=ty+2\\y^2=2px\end{cases}$消去$x$得：$y^2-2pty-4p^2=0$，则有$y_1y_2=-4p^2$，

由$OP\perp OQ$得：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=4-4p=0$，解得$p=1$，

于是抛物线C：$y^2=2x$的焦点$F(\frac{1}{2},0)$，弦PQ的中点M的纵坐标为$\frac{2pt}{2}=t$，则点$M(t^2+2,t)$，

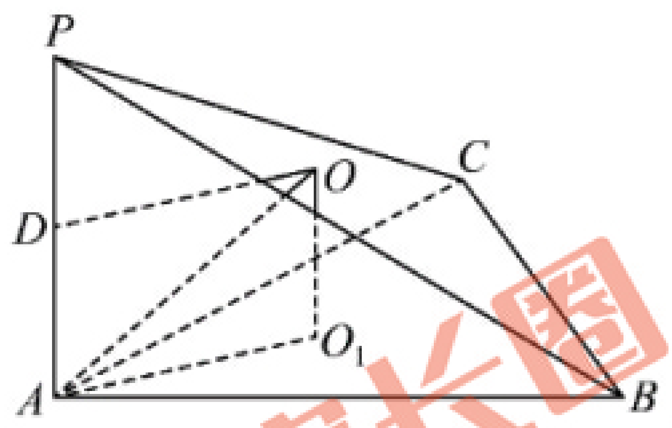
显然直线MF的斜率最大，必有$t>0$，则直线MF的斜率$k=\dfrac{t}{t^2+\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{2t+\frac{3}{t}}\le\dfrac{2}{2\sqrt{2t\cdot\frac{3}{t}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

当且仅当$2t=\frac{3}{t}$，即$t=\frac{\sqrt{6}}{2}$时取等号，

所以直线MF的斜率的取大值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.故选：A

7.A 【解析】在三棱锥$P-ABC$中，如图，$AB^2+PA^2=20=PB^2$，则$PA\perp AB$，同理$PA\perp AC$，

而$AB\cap AC=A,AB,AC\subset$平面ABC，因此$PA\perp$平面ABC，



在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC=4,BC=2$，则$\cos\angle ABC=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{AB}=\dfrac{1}{4}$，

$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

令$\triangle ABC$的外接圆圆心为O_1，则$OO_1\perp$平面ABC，$O_1A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$，

有$OO_1//PA$，取PA中点D，连接OD，则有$OD\perp PA$，又$O_1A\subset$平面ABC，即$O_1A\perp PA$，

从而$O_1A//OD$，四边形$ODAO_1$为平行四边形，$OO_1=AD=1$，又$OO_1\perp O_1A$，

因此球O的半径$R^2=OA^2=O_1A^2+O_1O^2=(\dfrac{8}{\sqrt{15}})^2+1^2=\dfrac{79}{15}$，

所以球O的表面积$S=4\pi R^2=\dfrac{316}{15}\pi$.故选：A

8.D 【解析】已知a,b,c均为正实数，$a=be^c,|\ln a|>|\ln b|$，

当$b=1,c=1$时，$a=e$，满足$|\ln a|=1>|\ln b|=0$成立，

对于 A，$a+b=\mathrm{e}+1>ab=\mathrm{e}$，故 A 错误；

对于 B，$a^b=\mathrm{e}>b^a=1$，故 B 错误；

对于 C，$c=1>\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}$，故 C 错误，

对于 D，由已知 $a=b\mathrm{e}^c>b\mathrm{e}^0=b$，则，$\ln a-\ln b>0$.

由 $|\ln a|>|\ln b|$ 则 $(\ln a)^2-(\ln b)^2>0$，

所以 $\ln a+\ln b>0$，即 $ab>1$，得 $b>\dfrac{1}{a}$，$a=b\mathrm{e}^c>\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^c$，即 $a^2>\mathrm{e}^c$.

下面证明 $\mathrm{e}^c>c+1$，$c>0$.

设 $f(c)=\mathrm{e}^c-c-1$，$f'(c)=\mathrm{e}^c-1>0$，所以 $f(c)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(c)=\mathrm{e}^c-c-1>f(0)=\mathrm{e}^0-1=0$，即 $\mathrm{e}^c>c+1$.

所以 $a^2>c+1$，故 D 正确，故选：D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.AC 【解析】对于 A 项，因为 $5\times(0.01+a+0.06+0.04+0.02)=1$，解得：$a=0.07$，故 A 项正确；

对于 B 项，$(0.01+0.07+0.06)\times5\times100=70$ 人，故 B 项错误；

对于 C 项，因为 $0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5=0.7$，$0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5+0.04\times5=0.9$，

$0.7<0.78<0.9$，所以第 78 百分位数位于 $[60,65)$ 之间，

设第 78 百分位数为 x，则 $0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5+(x-60)\times0.04=0.78$，解得：$x=62$，故 C 项正确；

对于 D 项，因为

$0.01\times5\times47.5+0.07\times5\times52.5+0.06\times5\times57.5+0.04\times5\times62.5+0.02\times5\times67.5=57.25$，即：估计该校学生体重的平均数约为 57.25，故 D 项错误.故选：AC.

10.ABD 【解析】依题意，$2\times\dfrac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，即 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z$，而 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，

对于 A，因为 $f(-\dfrac{\pi}{8})=\sin[2(-\dfrac{\pi}{8})+\dfrac{\pi}{4}]=0$，于是函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(-\dfrac{\pi}{8},0)$ 对称，A 正确；

对于 B，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\dfrac{\pi}{4}\le2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{9\pi}{4}$，而正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}]$ 上有且只有两个极值点，

所以函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有且仅有 2 个极值点，B 正确；

对于 C，因为$f(x)_{\max}=1, f(x)_{\min}=-1$，又$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=2$，因此$x_1,x_2$中一个为函数$f(x)$的最大值点，

另一个为其最小值点，又函数$f(x)$的周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，C 错误；

对于 D，依题意，$f(\alpha-\frac{\pi}{8})f(\beta-\frac{\pi}{8})=\sin 2\alpha\sin 2\beta=\frac{1}{2}$，

则$\cos 2(\alpha-\beta)-\cos 2(\alpha+\beta)=(\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta)-(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\sin 2\alpha\sin 2\beta)$

$=2\sin 2\alpha\sin 2\beta=1$，因此$\cos 2(\alpha-\beta)=1+\cos 2(\alpha+\beta)$，D 正确.故选：ABD

11.BCD 【解析】函数$f(x)=x^2+2(x\geq 0), g(x)=ae^{-x}(a>0)$，

对于 A，方程$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow h(x)=x^2+2-ae^{-x}=0$在$[0,1]$上有解，

显然函数$h(x)$在$[0,1]$上单调递增，则有$\begin{cases}h(0)=2-a\leq 0\\ h(1)=3-ae^{-1}\geq 0\end{cases}$，解得$2\leq a\leq 3e$，

因此关于x的方程$f(x)-g(x)=0$在$[0,1]$上无解，则$0<a<2$或$a>3e$，A 错误；

对于 B，设点$Q(t,ae^{-t})$，依题意，点Q关于直线$y=x$对称点(ae^{-t},t)在函数$f(x)=x^2+2$的图象上，

即关于t的方程$t=a^2e^{-2t}+2$有解，即$a^2=(t-2)e^{2t}$有解，此时$t>2$，令函数$\varphi(t)=(t-2)e^{2t},t>2$，

$\varphi'(t)=(2t-3)e^{2t}>0$，即函数$\varphi(t)$在$(2,+\infty)$上单调递增，$\varphi(t)>\varphi(2)=0$，

而函数$y=t-2, y=e^{2t}$在$(2,+\infty)$上都单调递增，它们的取值集合分别为$(0,+\infty),(e^4,+\infty)$，

因此函数$\varphi(t)$的值域为$(0,+\infty)$，又$a^2>0$，于是$a^2=(t-2)e^{2t}$在$(2,+\infty)$有解，

所以存在P,Q关于直线$y=x$对称，B 正确；

对于 C，设点$P(u,u^2+2),u\geq 0$，则点P关于y轴对称点$(-u,u^2+2)$在函数$g(x)=ae^{-x}(a>0)$的图象上，

即$ae^u=u^2+2\Leftrightarrow a=\frac{u^2+2}{e^u}$，令$F(u)=\frac{u^2+2}{e^u},u\geq 0$，$F'(u)=\frac{-u^2+2u-2}{e^u}=-\frac{(u-1)^2+1}{e^u}<0$，

即函数$F(u)$在$[0,+\infty)$上单调递减，$F(u)_{\max}=F(0)=2$，又$\forall u\in[0,+\infty)$，恒有$F(u)>0$，因此$0<a\leq 2$，C 正确；

对于 D，令$P(x_1,x_1^2+2),Q(x_2,ae^{-x_2})$，由$\angle POQ=90^\circ$得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+ae^{-x_2}(x_1^2+2)=0$，

显然$x_1x_2\neq 0$，且$x_1>0,x_2<0$，$a=\frac{x_1}{x_1^2+2}\cdot\frac{-x_2}{e^{-x_2}}$，令$G(x)=\frac{x}{e^x},x>0$，$G'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

当$0<x<1$时$G'(x)>0$，函数$G(x)$单调递增，当$x>1$时，$G'(x)<0$，函数$G(x)$单调递减，

因此 $G(x)_{\max}=G(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即有 $0<G(x)\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$0<\dfrac{-x_2}{\mathrm{e}^{-x_2}}\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

而 $0<\dfrac{x_1}{x_1^2+2}\le\dfrac{x_1}{2\sqrt{2x_1^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，当且仅当 $x_2=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $0<\dfrac{x_1}{x_1^2+2}\cdot\dfrac{-x_2}{\mathrm{e}^{-x_2}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{e}}$，即

$0<a\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{e}}$，D 正确.故选：BCD

12.BC 【解析】设点 $P(x,y)$，依题意，$[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]=25$，

对于 A，$25=[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]\ge(x+2)^2(x-2)^2=(x^2-4)^2$，当且仅当 $y=0$ 时取等号，

解不等式 $(x^2-4)^2\le25$ 得：$-3\leqslant x\leqslant3$，即点 P 的横坐标的取值范围是 $[-3,3]$，A 错误；

对于 B，$[(x^2+y^2+4)+4x][(x^2+y^2+4)-4x]=25$，则 $x^2+y^2+4=\sqrt{25+16x^2}$，

显然 $0\le x^2\le9$，因此 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sqrt{25+16x^2}-4}\in[1,3]$，B 正确；

对于 C，$\triangle PMN$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN\le\dfrac{1}{2}|PM||PN|=\dfrac{5}{2}$，当且仅当 $\angle MPN=90^\circ$ 时取等号，

当 $\angle MPN=90^\circ$ 时，点 P 在以线段 MN 为直径的圆 $x^2+y^2=4$ 上，由 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2+4=\sqrt{25+16x^2}\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{4}\\y=\pm\dfrac{5}{4}\end{cases}$，所以 $\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\dfrac{5}{2}$，C 正确；

对于 D，因为点 $(3,0)$ 在动点 P 的轨迹上，当点 P 为此点时，$|PM|+|PN|=5+1=6$，D 错误.故选：BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $2\sqrt{5}$.【解析】由题意知，$\vec{a}+\vec{b}=(4,2+x)$

又因为 $\vec{a}//(\vec{a}+\vec{b})$，所以 $1\times(2+x)=2\times4$，所以 $x=6$，

所以 $\vec{b}=(3,6)$，所以 $\vec{a}-\vec{b}=(-2,-4)$，所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.故答案为：$2\sqrt{5}$.

14. $\dfrac{10}{21}$【解析】因为数列 $\{2n-1\}$ 是正奇数列，

对于数列 $\{n^2-1\}$，当 n 为奇数时，设 $n=2k-1\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $n^2-1=(2k-1)^2-1=4k(k-1)$ 为偶数；

当 n 为偶数时，设 $n=2k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $n^2-1=4k^2-1$ 为奇数，

所以，$a_n=4n^2-1$，则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

因此，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$.故答案为：$\frac{10}{21}$

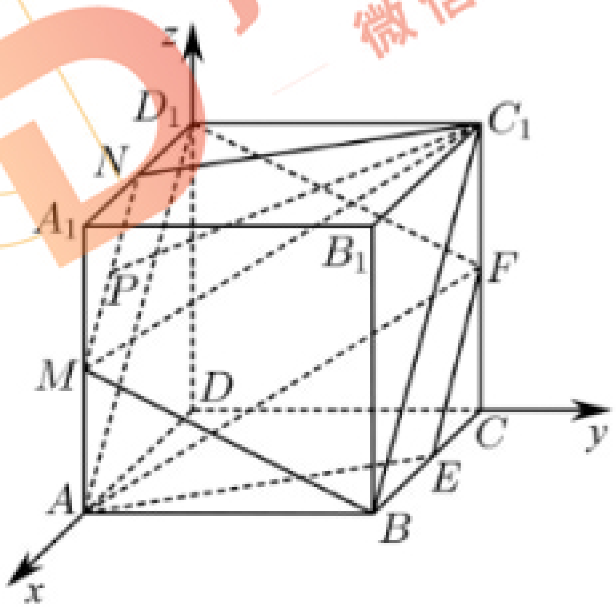
15. $(1,+\infty)$ 【解析】令函数 $g(x)=f(x)-\ln x, x>0$，则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}<0$，因此函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})-\ln\mathrm{e}=1$，因此 $f(\mathrm{e}^x)<x+1 \Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-x<1 \Leftrightarrow g(\mathrm{e}^x)<g(\mathrm{e})$，即 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}$，解得 $x>1$，

所以不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$ 的解集为 $(1,+\infty)$.故答案为：$(1,+\infty)$

16. ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 BC_1, FD_1, AD_1，如图，对角面 ABC_1D_1 矩形，



因为点 E、F 分别是棱 BC, CC_1 的中点，则 $EF \mathbin{//} BC_1 \mathbin{//} AD_1$，而 $EF=\frac{1}{2}AD_1$，

即平面 AEF 截正方体所得截面为梯形 $AEFD_1$，显然过点 C_1 与平面 $AEFD_1$ 平行的平面交平面 BCC_1B_1、平面 ADD_1A_1

分别于 BC_1, MN，因此 $MN \mathbin{//} BC_1 \mathbin{//} AD_1$，连 MC_1，平面 $BMNC_1$、平面 $AEFD_1$ 与平面 ACC_1A_1 分别交于 MC_1，AF，

因此 $MC_1 \mathbin{//} AF$，而 $AM \mathbin{//} FC_1$，即四边形 AMC_1F 为平行四边形，于是 $AM=FC_1=\frac{1}{2}$，

即点 M 为 AA_1 的中点，同理 N 为 A_1D_1 中点，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为动点 P 始终满足 $PC_1 \mathbin{//}$ 平面 AEF，

于是 $PC_1 \subset$ 平面 $BMNC_1$，又 P 在侧面 ADD_1A_1 上，所以点 P 的轨迹是线段 MN，轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；

以点 D 为原点建立空间直角坐标系，则 $M(1,0,\frac{1}{2}), N(\frac{1}{2},0,1), A(1,0,0), F(0,1,\frac{1}{2})$，

则 $\overrightarrow{MN}=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}), \overrightarrow{AM}=(0,0,\frac{1}{2}), \overrightarrow{AF}=(-1,1,\frac{1}{2})$，令 $\overrightarrow{MP}=t\overrightarrow{MN}=(-\frac{1}{2}t,0,\frac{1}{2}t)$，

则有 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=(-\frac{1}{2}t,0,\frac{1+t}{2})$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1+3t}{4}$，$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{\frac{1+3t}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{6}$，

于是点 P 到直线 AF 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AF}|})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}(t+1)^2-(\frac{1}{2}t+\frac{1}{6})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\geq\frac{\sqrt{2}}{3},$$

当且仅当 $t=0$ 时取等号，所以点 P 到直线 AF 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤.

17.（1）由 $S_n+2^n=2a_n+1$，得 $S_n=2a_n-2^n+1$，

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-2+1$，所以 $a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2^{n-1}+1$，

两式相减得 $a_n=2a_n-a_{n-1}-2^{n-1}$，即 $a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$，

所以 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}$，

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列；

（2）由（1）得 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2}$，所以 $a_n=n\cdot 2^{n-1}$，

$S_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，

$2S_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，

两式相减得 $-S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)2^n-1$，

所以 $S_n=(n-1)2^n+1$，

则 $S_{2k}=(2k-1)2^{2k}+1, 2a_k^2=k^2\cdot 2^{2k-1}$，

由 $2a_k^2<S_{2k}$，

得 $k^2\cdot 2^{2k-1}<(2k-1)2^{2k}+1$，

即 $k^2-4k+2-\frac{1}{2^{2k-1}}<0$，

令 $f(x)=x^2-4x+2-\frac{1}{2^{2x-1}}$，

因为函数 $y=x^2-4x+2, y=-\dfrac{1}{2^{2x-1}}$ 在 $(2,+\infty)$ 上都是增函数，

所以函数 $f(x)=x^2-4x+2-\dfrac{1}{2^{2x-1}}$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，

由 $f(1)=1-4+2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}<0, f(2)=4-8+2-\dfrac{1}{8}=-\dfrac{17}{8}<0$，

$f(3)=9-12+2-\dfrac{1}{2^5}=-1-\dfrac{1}{2^5}<0, f(4)=16-16+2-\dfrac{1}{2^7}=2-\dfrac{1}{2^7}>0$，

则当 $x\geq 4$ 时，$f(x)>0$，

所以若 $2a_k^2<S_{2k}$，正整数 k 的所有取值为 $1,2,3$.

18.（1）因为 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}b$，则 $\dfrac{a(1+\cos C)+c(1+\cos A)}{2}=\dfrac{3}{2}b$，

即 $a+c+a\cos C+c\cos A=3b$，

由正弦定理可得 $3\sin B=\sin A+\sin C+(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=\sin A+\sin C+\sin(A+C)$

$=\sin A+\sin C+\sin(\pi-B)=\sin A+\sin C+\sin B$，

因此，$\sin A+\sin C=2\sin B$.

（2）因为 $\sin A+\sin C=2\sin B$，由正弦定理可得 $a+c=2b=4$，

由平面向量数量积的定义可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=3$，

所以，$2c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+c^2-a^2}{2}=3$，可得 $c^2-a^2=2$，

即 $(c-a)(c+a)=4(c-a)=2$，所以，$c-a=\dfrac{1}{2}$，则 $c=\dfrac{9}{4}$，$a=\dfrac{7}{4}$，

所以，$\cos A=\dfrac{3}{bc}=\dfrac{3}{2\times\dfrac{9}{4}}=\dfrac{2}{3}$，则 A 为锐角，且 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

因此，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{9}{4}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$.

19.（1）取 AD 中点 E，连接 BE,PE，

因为 $BC//AD$，且 $BC=\dfrac{1}{2}AD=ED$，所以四边形 $EBCD$ 为平行四边形，即 $BE//CD$，

因为 $CD\perp AD$，所以 $BE\perp AD$；

因为 $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，所以 $PE\perp AD$；

$PE\cap BE=E$，所以 $AD\perp$ 平面 PEB，$PB\subset$ 平面 PEB，所以 $AD\perp PB$.

（2）过 P 做 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，过 O 做 $OH\perp AB$ 于 H，则 $\angle PHO$ 为平面 PAB 与平面 $ABCD$ 所成

角，

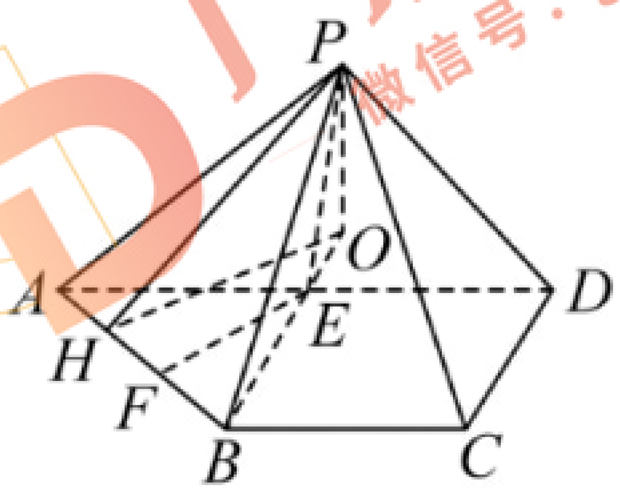
由（1）可知：$AD\perp$平面PEB，$AD\subset$平面$ABCD$，所以平面$PEB\perp$平面$ABCD$，平面$PEB\cap$平面$ABCD=BE$，

则$O\in$直线BE，由题意可知$PE=2$，$BE=2$，又$PB=2\sqrt{3}$，所以$\angle PEB=120^\circ$，在直角三角形PEO中，$\angle PEO=60^\circ$，所以$PO=\sqrt{3}$，$OE=1$，

过E做$EF\perp AB$于F，则$OH//EF$，

在$\triangle AEB$中，$BE\perp AE$，$BE=AE=2$，则$AB=2\sqrt{2}$，$EF=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{EF}{OH}=\dfrac{BE}{BO}=\dfrac{2}{3}$，所以$OH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle PHO=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则$\sin\angle PHO=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.



20.（1）甲前3次答题得分之和为40分的事件A是：甲前3次答题中仅只答对一次的事件，

所以甲前3次答题得分之和为40分的概率$P(A)=\mathrm{C}_3^1\times\dfrac{3}{4}\times(1-\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{9}{64}$.

（2）①甲第1次答题得20分、10分的概率分别为$\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}$，则$E(X_1)=20\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{35}{2}$，

甲第2次答题得40分、20分、10分的概率分别为$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}$，

则$E\left(X_2\right)=40\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}+20\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{115}{4}$，显然

$E(X_2)=2(20\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{1}{4})\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}E(X_1)+\dfrac{5}{2}$，

$i\in\mathrm{N}^*,i\geq 2$，甲第$i-1$次答题所得分数X_{i-1}的数学期望为$E(x_{i-1})$，

因此第i次答对题所得分数为$2E(x_{i-1})$，答错题所得分数为10分，其概率分别为$\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}$，

于是甲第i次答题所得分数X_i的数学期望为$E(x_i)=2E(x_{i-1})\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}E(x_{i-1})+\dfrac{5}{2}$，

所以$E(x_{i-1})$与$E(x_i)$满足的等量关系式是：$E(x_i)=\dfrac{3}{2}E(x_{i-1})+\dfrac{5}{2}$，$i\in\mathrm{N}^*,i\geq 2$，且$E(X_1)=\dfrac{35}{2}$；

②由①知，$E(X_1)=\frac{35}{2}$，当$i\in N^*, i\geq 2$时，$E(x_i)+5=\frac{3}{2}[E(x_{i-1})+5]$，而$E(X_1)+5=\frac{45}{2}$，

因此数列$\{E(x_i)+5\}$以$\frac{45}{2}$为首项，$\frac{3}{2}$为公比的等比数列，$E(x_i)+5=\frac{45}{2}\times(\frac{3}{2})^{i-1}=15\times(\frac{3}{2})^i$，

于是$E(x_i)=15\times(\frac{3}{2})^i-5$，由$15\times(\frac{3}{2})^i-5>100$得：$(\frac{3}{2})^i>7$，显然数列$\{(\frac{3}{2})^i\}$是递增数列，

而$(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}<7,(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{32}>7$，则有正整数$i_{\min}=5$，

所以i的最小值是5.

21.（1）由椭圆C的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$得：$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，即有$a^2=2b^2$，

由以C的短轴为直径的圆与直线$y=ax+6$相切得：$\frac{6}{\sqrt{a^2+1}}=b$，联立解得$a^2=8,b^2=4$，

所以C的方程是$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）$k\cdot k'$为定值，且$k\cdot k'=\frac{1}{2}$，

因为$|AP|\cdot S_2=|BP|\cdot S_1$，

则$\frac{|AP|}{|BP|}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|AP||PQ|\sin\angle APQ}{\frac{1}{2}|BP||PQ|\sin\angle BPQ}=\frac{|AP|\sin\angle APQ}{|BP|\sin\angle BPQ}$，

因此$\sin\angle APQ=\sin\angle BPQ$，而$\angle APQ+\angle BPQ=\angle ABP\in(0,\pi)$，有$\angle APQ=\angle BPQ$，

于是PQ平分$\angle APB$，直线AP,BP的斜率k_{AP},k_{BP}互为相反数，即$k_{AP}+k_{BP}=0$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$得，$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-8=0$，

即有$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}\\ x_1\cdot x_2=\frac{2k^2-8}{2k^2+1}\end{cases}$，

而$k_{AP}+k_{BP}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=0$，

则$(y_1-y_0)(x_2-x_0)+(y_2-y_0)(x_1-x_0)=0$，

即 $[k(x_1-1)-y_0](x_2-x_0)+[k(x_2-1)-y_0](x_1-x_0)=2kx_1x_2-(y_0+kx_0+k)(x_1+x_2)+2x_0(y_0+k)=0$

于是 $2k\cdot\dfrac{2k^2-8}{2k^2+1}-(y_0+kx_0+k)\cdot\dfrac{4k^2}{2k^2+1}+2x_0(y_0+k)=0$

$\Leftrightarrow 2k(2k^2-8)-4k^2(y_0+kx_0+k)+2x_0(y_0+k)(2k^2+1)=0$，

化简得：$2y_0(x_0-1)k^2+(x_0-8)k+x_0y_0=0$，

且又因为 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上，即 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{4}=1$，

即 $x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}=8$，$-2y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}+x_0=x_0-8$，

从而 $2y_0(x_0-1)k^2+(-2y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}+x_0)k+x_0y_0=0$，$(2y_0k-x_0)[(x_0-1)k-y_0]=0$，

又因为 $P(x_0,y_0)$ 不在直线 $l:y=k(x-1)$ 上，

则有 $2y_0k-x_0=0$，即 $k\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=k\cdot k'=\dfrac{1}{2}$，

所以 $k\cdot k'$ 为定值，且 $k\cdot k'=\dfrac{1}{2}$.

22.（1）若 $a=1$，则 $f(x)=(1-x)(e^x-1)$，

设 $g(x)=\ln(x+1)-(1-x)(e^x-1),x>0$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-[-(e^x-1)+(1-x)e^x]=\dfrac{x[(x+1)e^x-1]}{x+1}$，

设 $\varphi(x)=(x+1)e^x-1,x>0$，

$\varphi'(x)=(x+2)e^x>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $g'(x)>0$，

于是 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(x)>g(0)=0$，即 $f(x)<\ln(x+1)$，

所以当 $x>0$ 时，$f(x)<\ln(x+1)$.

（2）函数 $h(x)=\ln(x+1)-(1-ax)(e^x-1),a>0$，

其定义域为 $(-1,+\infty),h(0)=0$，

$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+(ax+a-1)e^x-a=\dfrac{(x+1)(ax+a-1)e^x-(ax+a-1)}{x+1}=\dfrac{(ax+a-1)[(x+1)e^x-1]}{x+1}$，

由（1）知 $\varphi(x)=(x+1)e^x-1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(0)=0$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$\varphi(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，

则由 $h'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{a}-1$，其中 $\frac{1}{a}-1>-1$ 且 $\frac{1}{a}-1\neq 0$，即 $a>0$ 且 $a\neq 1$，

否则恒有 $h'(x)\geq 0$，则 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，函数 $h(x)$ 无极值点，不符合题意，

若 $-1<\frac{1}{a}-1<0$，即 $a>1$，当 $x\in(-1,\frac{1}{a}-1)\cup(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

当 $x\in(\frac{1}{a}-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{a}-1),(0,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\frac{1}{a}-1,0)$ 上单调递减，因此 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极小值点，$f(0)=0$，

若 $\frac{1}{a}-1>0$，即 $0<a<1$，当 $x\in(-1,0)\cup(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

当 $x\in(0,\frac{1}{a}-1)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(-1,0),(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(0,\frac{1}{a}-1)$ 单调递减，因此 $x=\frac{1}{a}-1$ 是 $h(x)$ 的极小值点，

$f(\frac{1}{a}-1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)$，又 $0<a<1,\frac{1}{a}-1>0$，于是 $f(\frac{1}{a}-1)>0$，

综上所述，函数 $h(x)=\ln(x+1)-f(x)$ 存在极小值点 $x_0,f\left(x_0\right)\geq 0$.