九师联盟
JIUSHILIANMENG

2020～2021学年高三2月质量检测巩固卷

数　学(文科)

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{1,4,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{1,4,5\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 已知 i 为虚数单位，若 $(z-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则复数 z 的模是

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

3. “$x>\log_4 8$”是“$x>\frac{\sqrt{7}}{2}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知定义在区间 $[-3,3]$ 上的函数 $f(x)=m\cdot 2^x+3$ 满足 $f(1)=7$，在 $[-3,3]$ 上随机取一个实数 x，则使得 $f(x)$ 的值不小于4的概率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

5. 已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $x-2y=0$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

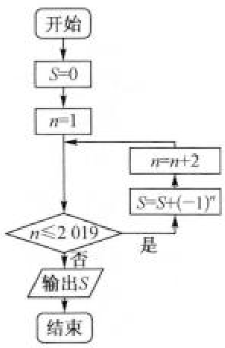
6. 若执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值是

A. $-1\ 009$

B. $-1\ 010$

C. $-1\ 011$

D. $-1\ 012$



7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-3b,2+b]$ 上的偶函数，且在 $[0,2+b]$ 上为减函数，则不等式 $f(x-1)\leqslant f(2x)$ 的解集为

A. $\left[-1,\frac{2}{3}\right]$　　　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

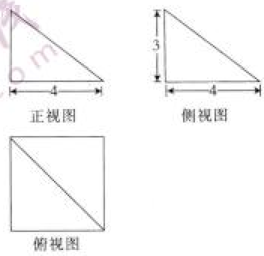
C. $[-1,1]$　　　　D. $\left[\frac{1}{3},1\right]$

8. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是："一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯多少？"现有类似问题：一座 5 层塔共挂了 242 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 3 倍，则塔的底层共有灯

A. 81 盏　　　　B. 112 盏

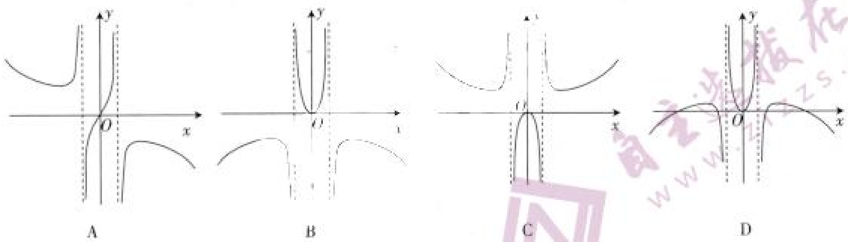
C. 114 盏　　　　D. 162 盏

9. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为



A. 46　　B. 48　　C. 50　　D. 52

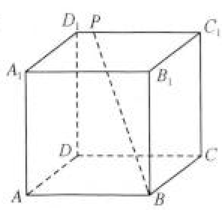
10. 函数 $f(x)=\dfrac{x(e^{-x}-e^{x})}{4x^2-1}$ 的部分图象大致是



11. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\omega x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则非负实数 ω 的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right]$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

12. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 C_1D_1 上的动点，则直线 PB 与平面 CC_1D_1D 所成角（过点 B 作平面 CC_1D_1D 的垂线，设垂足为 O. 连接 PO，直线 PB 与直线 PO 相交所形成不大于 90°的角）的正弦值的范围是



A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　　　D. $\left[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\theta,\cos\theta)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta=$__________.

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=$__________.

15. 已知边长为 2 的 $\triangle ABC$ 的各顶点均在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球面上，则该球面上的点到平面 ABC 距离的最大值为________.

16. 已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上不同于顶点的任意一点，过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为点 Q，点 $M(7,6)$，则线段 PM 与线段 PQ 长的和取得最小值时点 P 的坐标为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin^2 A+\sqrt{3}\sin A\cos A-\dfrac{3}{2}=0$.

（1）求角 A 的大小；

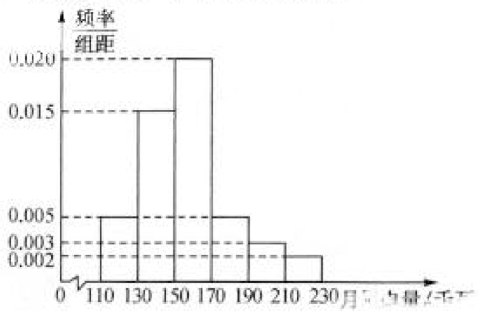
（2）若 $b=1$，$c=2$，求 a.

18.（本小题满分 12 分）

电力是以电能作为动力的资源，其发明于 19 世纪 70 年代. 电力的发明和应用掀起了第二次工业化高潮，电力工业是国民经济发展中最重要的基础能源产业，它不仅关系到国家经济的战略问题，也是关系到人们日常生活的民生问题. 2019 年初，电力企业对共有 1 000 户居民的某小区居民的用电量情况进行调查，且将用电量（单位：千瓦时）分成范围为 $[110,130)$，$[130,150)$，$[150,170)$，$[170,190)$，$[190,210)$，$[210,230]$，共 6 个组，得到频率分布直方图如图.

（1）若同一组中的数据近似地用该组区间的中点值代表，求该小区每户居民月用电量的平均数；

（2）若按分组用分层抽样的方法从该小区月用电量范围为 $[110,130)$，$[130,150)$，$[150,170)$ 的三组中抽选出 8 户，然后从该 8 户中任取 2 户，求“被选出的 2 户用电量属于不同组”的概率.

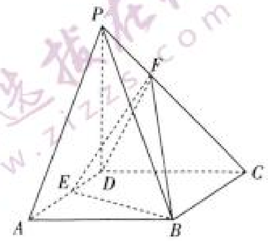


19.（本小题满分 12 分）

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60^\circ$，又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 是棱 AD 的中点，F 在棱 PC 上，且 $AD=PD=4$.

(1)证明：平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.

(2)若 $PA\parallel$ 平面 BEF，求四棱锥 $F-BCDE$ 的体积.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 $M(0,2)$ 在椭圆 C 上，三角形 F_1MF_2 是直角三角形.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若过点 M 作直线 MA,MB，且直线 MA,MB 分别交椭圆 C 于 A,B 两点，直线 MA,MB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1+k_2=8$，则直线 AB 是否过定点？若过定点，则求出定点的坐标；若不过定点，也请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x,g(x)=\ln x$.

(1)求函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 的极值；

(2)求证：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)+\frac{21}{10}$.

参考数据：$\ln 2=0.693$

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：**坐标系与参数方程**

以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\varphi,\\ y=2+t\sin\varphi\end{cases}$（$t$ 为参数，$0\leqslant\varphi<\pi$），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，当 φ 变化时，求 $|AB|$ 的最小值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：**不等式选讲**

已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=2$. 证明：

(1)$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 8$；

(2)$a^4+b^4\geqslant 2$.

2020～2021 学年高三 2 月质量检测巩固卷·数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. D　∵$A=\{1,4,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，∴$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$．故选 D．

2. C　∵$(z-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，∴$z-\mathrm{i}=\frac{5}{2-\mathrm{i}}$，∴$z=\mathrm{i}+\frac{5(2+\mathrm{i})}{2^2-\mathrm{i}^2}=2+2\mathrm{i}$，∴$|z|=2\sqrt{2}$．故选 C．

3. A　∵$\log_4 8=\frac{3}{2}>\frac{\sqrt{7}}{2}$，∴选 A．

4. A　由 $f(1)=7$，得 $3+2m=7$，$m=2$，故 $f(x)=2^{x+1}+3$，由 $f(x)\geqslant 4$ 得 $x\geqslant -1$，因此所求概率为$\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$．

5. D　据题意，得$\frac{|a|}{|b|}=\frac{1}{2}$，所以所求双曲线的离心率 $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+4a^2}{a^2}}=\sqrt{5}$．故选 D．

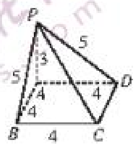
6. B　$S=0$，$n=1$；$S=0+(-1)^1$，$n=1+2=3$；$S=(-1)^1+(-1)^3$，$n=5$；$S=(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5$，$n=7$；…；$S=(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5+\cdots+(-1)^{2019}$，$n=2\ 021$，此时不满足 $n\leqslant 2\ 019$，循环结束，输出 S 的值是 $-1\ 010$．故选 B．

7. B　∵$f(x)$是定义在$[-3b,2+b]$上的偶函数，∴$-3b+(2+b)=0$，解得 $b=1$，即函数的定义域为$[-3,3]$．∵函数在$[0,3]$上为减函数，且 $f(x-1)\leqslant f(2x)$，∴$|2x|\leqslant|x-1|\leqslant 3$，解得$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$．故选 B．

8. D　由题可知，灯数自上而下成公比为 3 的等比数列，记该数列为$\{a_n\}$，由$\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}=242$，得 $a_1=2$，所以 $a_5=2\times 3^4=162$．

9. B　该几何体是如图所示的一个四棱锥 $P-ABCD$，所以其表面积为

$S=2\times\left(\frac{3\times 4}{2}+\frac{5\times 4}{2}\right)+4\times 4=48$．



10. B　因为 $f(-x)=\frac{-x(e^x-e^{-x})}{4x^2-1}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，图象关于 y 轴对称．当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f(x)=\frac{x(e^{-x}-e^x)}{4x^2-1}>0$．当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f(x)<0$．当$x<0$时，根据对称性可判断图形的形状，所以符合条件的为 B．

11. C　$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x=\frac{1}{2}\sin 2\omega x$．讨论：当 $\omega=0$ 时，$f(x)=0$，不满足题设；当 $\omega>0$ 时，令$\frac{1}{2}\sin 2\omega x=\frac{1}{2}$，则 $2\omega x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，∴$x=\frac{1}{2\omega}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$．分析知，函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\omega x(\omega>0)$图象在 y 轴右侧第一个最高点的横坐标为$\frac{1}{2\omega}\times\frac{\pi}{2}$，∴据题设知，$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4\omega}(\omega>0)$，∴$0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$．故选 C．

12. A　连接 PC，则$\angle BPC$ 为直线 PB 与平面 CC_1D_1D 所成的角．设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，$PC_1=x(0\leqslant x\leqslant a)$，所以 $PB=\sqrt{BC^2+PC^2}=\sqrt{BC^2+PC_1^2+CC_1^2}=\sqrt{a^2+x^2+a^2}$，所以 $\sin\angle BPC=\frac{BC}{PB}=\frac{a}{\sqrt{2a^2+x^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{2a^2+x^2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. 又因为 $0\leqslant\frac{x}{a}\leqslant1$，所以 $2\leqslant2+\left(\frac{x}{a}\right)^2\leqslant3$，所以 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

13. 1　∵$\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\theta,\cos\theta)$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times\sin\theta-1\times\cos\theta=\sin\theta-\cos\theta$. 又∵$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴$\sin\theta-\cos\theta=0$，∴$\sin\theta=\cos\theta$，∴$\tan\theta=1$.

14. $\frac{1}{n}$　因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{n}$.

15. $\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{3}$　设球的半径为 R，则 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，所以 $R=\sqrt{3}$，所以球心到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\sqrt{2^2-1^2}\times\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以球面上的点到平面 ABC 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{3}$.

16. $(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$　抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 坐标为 $(1,0)$. 据题意知，$|PQ|=|PF|-1$，∴$|PM|+|PQ|=|PM|+|PF|-1$，∴$(|PM|+|PQ|)_{\min}=(|PM|+|PF|)_{\min}-1$. 直线 MF 方程为 $y=x-1$，解 $\begin{cases}y=x-1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3-2\sqrt{2},\\y=2-2\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3+2\sqrt{2},\\y=2+2\sqrt{2}.\end{cases}$ 分析知，所求点 P 的坐标为 $(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$.

17. 解：(1) ∵$\sin^2A+\sqrt{3}\sin A\cos A-\frac{3}{2}=0$，

∴$\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2A-\frac{3}{2}=0$，……………… 2分

∴$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2A-\frac{1}{2}\cos2A=1$，

∴$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，……………… 4分

∴$2A-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

∴$A=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. ……………… 6分

又∵$0<A<\pi$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$. ……………… 7分

(2) 据(1)求解知，$A=\frac{\pi}{3}$.

又∵$b=1$，$c=2$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ………………………………………………………… 9分

$=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=3$， ………………………………………………………………………… 11分

$\therefore a=-\sqrt{3}$（舍）或 $a=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12分

18. 解：(1) $[110,130)$，$[130,150)$，$[150,170)$，$[170,190)$，$[190,210)$，$[210,230]$各区间的中点值分别为120，140，160，180，200，220， ………………………………………………………… 2分

所求该小区每户居民用电量的平均数 $\bar{x}=[1\,000\times(0.005\times20)\times120+1\,000\times(0.015\times20)\times140+1\,000\times(0.020\times20)\times160+1\,000\times(0.005\times20)\times180+1\,000\times(0.003\times20)\times200+1\,000\times(0.002\times20)\times220]\times\frac{1}{1\,000}$ ……… 5分

$=156.8$（千瓦时）. ………………………………………………………… 6分

(2)该小区1 000户居民中用电范围为 $[110,130)$，$[130,150)$，$[150,170)$ 的户数分别为100（户），300（户），400（户），
………………………………………………………………………… 7分

所以按组用分层抽样方法，从 $[110,130)$，$[130,150)$，$[150,170)$ 三组中抽选8户，其中分别抽选1户，3户，4户，
………………………………………………………………………… 8分

所以所求的概率 $p=\frac{3+4+12}{7+6+5+4+3+2+1}$ ………………………………………… 11分

$=\frac{19}{28}$. ………………………………………………………… 12分

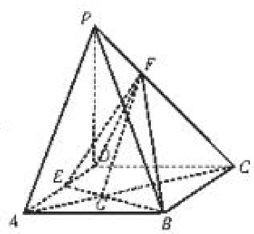
19. (1)证明：$\left.\begin{array}{l}PD\perp 平面ABCD\\EB\subset 平面ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow PD\perp EB$， ………………………………………… 2分

又底面 $ABCD$ 是 $\angle A=60^\circ$ 的菱形，且点 E 是棱 AD 的中点，所以 $EB\perp AD$.

又 $PD\cap AD=D$，所以 $BE\perp$ 平面 PAD. ………………………………………… 4分

$\left.\begin{array}{l}BE\perp 平面PAD\\BE\subset 平面BEF\end{array}\right\}\Rightarrow$ 平面 $BEF\perp$ 平面 PAD. ………………………………………… 6分

(2)解：连接 AC 交 BE 于 G，连接 GF，则 $GF=$ 平面 $PAC\cap$ 平面 BEF，



因为 $PA\parallel$ 平面 BEF，所以 $PA\parallel FG$. ………………………………………… 8分

因为底面 $ABCD$ 是菱形，且点 E 是棱 AD 的中点，所以 $\triangle AEG\backsim\triangle CBG$ 且 $AG:GC=AE:BC=1:2$，

所以 $PF:FC=AG:GC=1:2$. …………………………………………

梯形 $BCDE$ 的面积 $S=\frac{(2+4)}{2}\times 4\sin 60^{\circ}=6\sqrt{3}$，所以 $V_{F-BCDE}=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times\frac{8}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$. ………… 12 分

20. 解：(1) 据题意，得 $\begin{cases} b=2, \\ a^2+a^2=(2c)^2, \\ c^2=a^2-b^2, \end{cases}$ ………… 3 分

所以 $\begin{cases} a^2=8, \\ b^2=4. \end{cases}$ ………… 4 分

所以所求椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………… 5 分

(2) 讨论：若直线 AB 的斜率存在，则设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$.

据 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4mkx+2m^2-8=0$. ………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4mk}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2}$. ………… 7 分

又因为 $\frac{y_1-2}{x_1-0}+\frac{y_2-2}{x_2-0}=8$，

所以 $\frac{kx_1+m-2}{x_1}+\frac{kx_2+m-2}{x_2}=8$，

所以 $(2k-8)x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)=0$，

所以 $(2k-8)\times\frac{2m^2-8}{1+2k^2}+(m-2)\times\left(-\frac{4mk}{1+2k^2}\right)=0$，

所以 $(m-2)k=2(m+2)(m-2)$. ………… 8 分

又分析知，$m\neq 2$，

所以 $m=\frac{1}{2}k-2$，

所以直线 AB 方程为 $y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)-2$，………… 9 分

所以直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$. ………… 10 分

若直线 AB 的斜率不存在，则设直线 AB 方程为 $x=x'$，且 $A(x',y')$，$B(x',-y')$，

所以 $\frac{y'-2}{x'-0}+\frac{-y'-2}{x'-0}=8$，

所以 $x'=-\frac{1}{2}$，即直线 AB 方程为 $x=-\frac{1}{2}$，此时直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$. …………

综上，直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$. ………………………………………… 12分

21. 解：(1) ∵ $F(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}$,

∴ $F'(x)=\frac{(e^x)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$. ………………………………………… 1分

令 $F'(x)=0$，则 $x=1$.

分析知，当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$. ………………………… 2分

∴函数 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增， ……………… 3分

∴当 $x=1$ 时，函数 $F(x)$ 存在极小值 $F(1)=e$，不存在极大值. ………………………………………… 4分

证明：(2) 引入函数 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\ln x$,

∴ $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

分析知，函数 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 5分

又 $h'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-2<0$,

$h'(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=2-\frac{1}{\ln 2}>0$,

∴函数 $h'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$, ………………………………… 7分

∴当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$,

∴函数 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0\left(\frac{1}{2}<x_0<\ln 2\right)$. ………………………………… 9分

引入函数 $G(x)=\frac{1}{x}+x\left(\frac{1}{2}<x<\ln 2\right)$,

∴ $G'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$,

∴当 $\frac{1}{2}<x<\ln 2$ 时，$G'(x)<0$,

∴函数 $G(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 上单调递减，

∴当 $x\in\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 时，$G(x)>\frac{1}{\ln 2}+\ln 2$,

$=\frac{1}{0.693}+0.693$

≈ 2.136

>2.1，……………………………………………………………………………… 11分

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)+\frac{21}{10}$. ……………………………………………………………… 12分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=t\cos\varphi\\ y=2+t\sin\varphi\end{cases}$ 消去 t 得 $x\sin\varphi-y\cos\varphi+2\cos\varphi=0$，…………………………………… 1分

所以直线 l 的普通方程为 $x\sin\varphi-y\cos\varphi+2\cos\varphi=0$. …………………………………………………… 2分

由 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$，得 $(\rho\cos\theta)^2=8\rho\sin\theta$，……………………………………………………………… 3分

把 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$ 代入上式，得 $x^2=8y$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=8y$. ……………………………………………………………………… 5分

(2) 将直线 l 的参数方程代入 $x^2=8y$，得 $t^2\cos^2\varphi-8t\sin\varphi-16=0$，……………………………………… 6分

设 A、B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=\frac{8\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$，$t_1t_2=-\frac{16}{\cos^2\varphi}$，……………………………………………………………… 7分

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{64\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}+\frac{64}{\cos^2\varphi}}=\frac{8}{\cos^2\varphi}$. ……………………………… 9分

当 $\varphi=0$ 时，$|AB|$ 的最小值为 8. ……………………………………………………………………… 10分

23. 证明：(1) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})(a+b)=\frac{1}{2}(10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b})\geqslant\frac{1}{2}(10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}})=8$，…………………………… 3分

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$ 时，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ 时取等号. ……………………………………………………… 4分

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 8$. ……………………………………………………………………………………… 5分

(2) 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，

所以 $2(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)^2\geqslant[\frac{1}{2}(a+b)^2]^2=4$，……………………………………………………… 8分

即 $a^4+b^4\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号. ……………………………………………………………… 9分

所以 $a^4+b^4\geqslant 2$. ……………………………………………………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》