

江西省 东乡一中 都昌一中 新建二中 新八校  
景德镇二中 上饶中学 上栗中学 新建二中

2022 届高三第一次联考文科数学试题

命题人：新建二中 邓国平 审题人：新建二中 边群根  
考试时间：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：(共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的一项。)

1. 设全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x - 2 \leq 0\}$ , 集合  $B = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$  则下图中阴影部分表示的集合为



( )

- A.  $\{x | x < 3\}$     B.  $\{x | -2 < x \leq 2\}$     C.  $\{x | x < -2\}$     D.  $\{x | -2 < x \leq 3\}$

2. 若复数  $z = 2a + 1 + \frac{i+1}{1-i}$  为纯虚数，则实数  $a =$  ( )

- A.  $-\frac{2}{3}$     B.  $\frac{2}{3}$     C.  $\frac{1}{2}$     D.  $-\frac{1}{2}$

3. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 则 " $a < 0$ " 是 " $a^2 > a$ " 的 ( ) 条件

- A. 充分不必要    B. 必要不充分    C. 充要    D. 既不充分也不必要

4. 已知  $a = \lg 2$ ,  $b = \log_2 2$ ,  $c = 8^{-\frac{1}{3}}$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$     B.  $a < c < b$     C.  $b < a < c$     D.  $b < c < a$

5. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - y \geq -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ , 则  $z = 4x - 3y$  的最大值为 ( )

- A. -13    B. 13    C. -5    D. 5

6. 《算法统宗》是中国古代数学名著，许多数学问题都以歌诀形式呈现。“九儿问甲歌”就是其中一公公九个儿，若问生年总不知，自长排来差六岁，共年三百又零六，借问小儿多少岁，各儿岁推，这位公公年龄最小的儿子年龄为 ( )

- A. 8 岁    B. 10 岁    C. 28 岁    D. 58 岁

7. 已知  $A$  是抛物线  $y^2 = 4x$  上的一动点， $F$  是抛物线的焦点，点  $B(2, 1)$ , 则  $|AB| + |AF|$  的最小值为

- A. 3    B.  $3\sqrt{3}$     C.  $\sqrt{2}$     D.  $4\sqrt{2}$

8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 = 2, a_3 \cdot a_7 = 4(a_5 - 1)$ , 则  $a_5$  的值为 ( )

*( $a_3 \cdot a_7 = a_5^2 = 2$ )*

A. 2      B. 8      C. 16      D. 32

9. 从区间  $(0, 4)$  内任取一个实数  $a$ , 则椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的离心率  $e \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  的概率为 ( )

A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$       D.  $\frac{3}{4}$

10. 已知函数  $f(x)$  的最小正周期为  $6\pi$ , 且  $f(\omega x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ , 则  $f(\frac{\pi}{2})$  的值与下列哪个函数值相等 ( )

*$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{6})$*

A.  $f(\frac{\pi}{6})$       B.  $f(\frac{\pi}{4})$       C.  $f(\pi)$       D.  $f(\frac{3\pi}{2})$

11. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 3, 3a_{n+1} - 2a_n = a_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $b_n = \log_2(a_n + 1)$ ,  $b_n = \log_2 2^{n+1} = n+1$

*( $a_3 = 7, a_4 = 11$ )*

$S_n = 2021(\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_n b_{n+1}})$ ,  $S_n \geq 2t$  对  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立, 则实数  $t$  的最大整数是 ( )

A. 1010      B. 1009      C. 506      D. 505

12. 锐角  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ , 若函数  $f(x) = x^2 + \frac{c^2 - ab - a^2}{2}$

有唯一零点, 则  $\frac{4b}{a} + \frac{4a}{b}$  范围为 ( )

A.  $(10, 12)$       B.  $(8, 10)$       C.  $(8, +\infty)$       D.  $(8, 12)$

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

3. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (x, 1)$ , 且  $|\vec{a}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. 蝉的鸣叫可以说是大自然和谐的音乐, 蝉的鸣叫的频率  $x$  (每分钟鸣叫的次数) 与气温  $y$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 存在着较强的线性相关关系. 某地观测人员根据下表的观测数据, 建立了  $y$  关于  $x$  的线性回归方程

$\hat{y} = 0.5x + a$ , 当蝉的每分钟鸣叫 56 次时, 该地当时的气温预报值为  $43$

$x$ (次/分)	10	20	30	40	50
$y$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	25	27	30	33	35

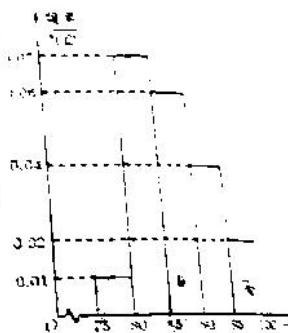
15. 已知正四棱柱的八个顶点均在同一个球面上, 且球的表面积为  $16\pi$ , 当正四棱柱的体积最大时, 正四棱柱的高为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 法国著名的军事家拿破仑最早提出的一个几何定理: “以任意三角形的三条边为边向外构造三个等边三角形, 则这三个三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形的顶点”. 在三角形  $ABC$  中, 角  $A = 60^\circ$ , 以  $AB, BC, AC$  为边向外作三个等边三角形, 其外接圆圆心依次为  $O_1, O_2, O_3$ , 三角形  $O_1O_2O_3$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 则  $|AB| + |AC|$  的最大值是  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。)

17. (12 分) 为迎接建党 100 周年, 某单位组织全体党员开展“学党史, 知党情, 感党恩”系列活动。在党史知识竞赛中, 共设置 20 个小题, 每个小题 5 分。随机对 100 名党员的成绩进行统计, 成绩均在 75 分以内, 现将成绩分成 5 组, 按照下面分组进行统计分析: 第 1 组  $[75, 80)$ , 第 2 组  $[80, 85)$ , 第 3 组  $[85, 90)$ , 第 4 组  $[90, 95)$ , 第 5 组  $[95, 100]$ , 并绘制成如图所示的频率分布直方图。

已知甲、乙、丙分别第 3, 4, 5 组, 现在用分层抽样的方法在第 3, 4, 5 组共选取 6 人 (包含甲、乙、丙) 参加党史知识抢答赛。



(1) 求该组数据的中位数 (结果精确到 0.01) 并求第 3 组选取参加抢答赛的人数;

(2) 若从参加抢答赛的 6 人中随机选取 3 人参加上级部门的党史知识复赛,

求甲、乙、丙 3 人至少有 2 人被选取的概率。

$\frac{1}{2}$

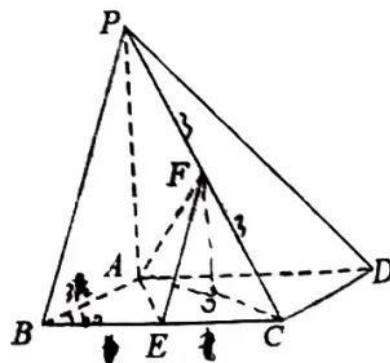
18. (12 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,

$PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $E$  为  $BC$  的中点,  $F$  为  $PC$  的中点。

(1) 求证: 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若  $PA = AD$ ,  $PF = 3$ , 求四棱锥  $F-ABCD$  的体积。

$\frac{9\sqrt{3}}{4}$



19. (12分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $4ac \cos \frac{B}{2} = 3b^2$ .

(1) 证明:  $\sin A, \sin B, \sin C$  依次成等差数列;

(2) 若  $b=3, \cos B = \frac{4}{5}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

20. (12分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的短半轴为 1, 长轴长是焦距的  $\sqrt{2}$  倍, 求:

(1) 椭圆  $C$  的方程;

(2) 过椭圆  $C$  的右焦点  $F$  作直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点 ( $A$  在  $B$  的上方), 直线  $l$  与直线  $x=2$

相交于点  $D$ , 点  $T(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 记  $TA, TB, TD$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3$ , 证明:  $\frac{k_1+k_2}{4k_3}$  为定值,  $\frac{1}{2}$

并求出该定值.

21. (12分) 已知函数  $f(x) = ae^x - x, a \in \mathbb{R}$ , 其中  $e$  是自然对数的底数.

(1) 当  $a > 0$  时, 讨论函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的单调性;

(2) 当  $a = 1$  时, 求证:  $f(x) > -x^2 + 3x - 1$ .

请考生在第 22、23 题中任选一题做作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴正

半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ .

(1) 求曲线  $C$  的普通方程与直线  $l$  的直角坐标方程;

(2) 若直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $M, N$  两点, 点  $P(1, 1)$ , 求  $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|}$  的值.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

23. 若函数  $f(x) = |x-2| - m$ , 且  $f(x+2) \leq 0$  的解集为  $[-1, 1]$ .

(1) 求实数  $m$  的值;

(2) 若  $a, b, c$  为正实数,  $\frac{1}{ma} + \frac{1}{2mb} + \frac{1}{3mc} = 2$ , 求证:  $a+2b+3c \geq \frac{9}{2}$

## 文科数学参考答案

1. 【解】C 由题意可得:  $A = \{x | x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -2\}$

2. 【解】D  $z = 2n+1 + \frac{i-1}{1-i} = 2n+1+i$ , 实部等于 0

3. 【解】D 特殊值

4. 【解】A  $a = \frac{1}{\log_2 10}$ ,  $b = \frac{1}{\log_2 6}$ ,  $c = \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_2 4}$ , 故  $a < b < c$ .

5. 【解】B  $\begin{cases} y=1 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$  作可行域, 直线  $z=4x-3y$  过点  $A(4,1)$  时  $z$  取最大值 13

6. 【解】B 由题意九个儿子的年龄成等差数列, 公差为 6. 记最小的儿子年龄为  $a_1$ , 则

$$S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2} \times 6 = 306, \text{ 解得 } a_1 = 10$$

7. 【解】A 过  $A$  作  $AN$  垂直准线,  $N$  为垂足,  $|AN| = |AF|$ , 所以  $|AB| + |AF| \geq |NB| \geq 3$ .

8. 【解】B 根据等比数列的性质可得  $a_3 a_7 = a_5^2$ ,  $\therefore a_5^2 = 4(a_5 - 1)$ , 即  $(a_5 - 2)^2 = 0$ , 解得

$$a_5 = 2, \text{ 又 } \because a_2 = 2, a_2 a_8 = a_5^2 = 4, \text{ 故可得 } a_8 = 2.$$

9. 【解】C 从区间  $(0, 4)$  内任取一个实数  $a$ . 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 从

区间  $(0, 4)$  内任取一个实数  $a$ , 则  $1 < a < \sqrt{2}$  的概率为  $P = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

10. 【解】D 设  $\omega x = t$ ,  $\therefore x = \frac{t}{\omega}$ ,  $\therefore f(t) = \sin\left(\frac{t}{\omega} + \frac{\pi}{6}\right)$ , 即  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\omega}x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,

$$6\pi = 2\pi\omega, \text{ 解得 } \omega = 3, \text{ 即 } f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right), \therefore f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. 【解】D.  $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \Rightarrow a_n = 2^n - 1, b_n = n \Rightarrow s_n = \left(2021 - \frac{2021}{n+1}\right), (t)_{\max} = 505$

12. 【解】B.  $f(0) = 0 \Rightarrow b - 2a \cos C = a, C = 2A, A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow C \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$\frac{b}{a} = 2 \cos C + 1 \in (1, 2) \Rightarrow \frac{4b}{a} + \frac{4a}{b} \in (8, 10)$$

13.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  【解】  $\because |\vec{a}|=1, \therefore x=1$ , 即  $\vec{b}=(1,1)$ ,  $|\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 43℃ 【解】  $\hat{y} = 0.5x + a$  过中心点 (30,30), 所以  $a=15 \Rightarrow y=0.5x+15$ ,  $x=56$  时,  $y=43$ .

15.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  【解】 设正四棱柱的底面边长为  $a$ , 高为  $h$ , 球的半径为  $r$ , 由题意知  $4\pi r^2=16\pi$ ,

所以  $r^2=4$ , 又  $2a^2+h^2=(2r)^2=16$ , 所以  $a^2=8-\frac{h^2}{2}$ , 所以正四棱柱的体积  $V=a^2h=(8-\frac{h^2}{2})$

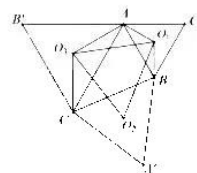
$h$ , 则  $V'=8-\frac{3}{2}h^2$ , 由  $V'>0$ , 得  $0<h<\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 由  $V'<0$ , 得  $h>\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 所以当  $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$  时,

正四棱柱的体积最大.

16. 2 【解】 如图, 设  $\triangle ABC$  角  $A, B, C$  所对边长分别为  $a, b, c$ ,

$\triangle ABC', \triangle CAB', \triangle BCA'$  都是正三角形,  $O_1, O_2, O_3$  分别为其中心,  $\triangle O_1O_2O_3$

中,  $\angle AO_1B = 120^\circ, \angle O_1AB = \angle O_1BA = 30^\circ$ ,



$\frac{AO_1}{\sin \angle ABO_1} = \frac{AB}{\sin \angle AO_1B}$ ,  $AO_1 = \frac{\sqrt{3}c}{3}$ , 同理  $AO_3 = \frac{\sqrt{3}b}{3}$ , 正

$\triangle O_1O_2O_3$  面积  $S = \frac{1}{2} \cdot O_1O_3^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} O_1O_3^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $O_1O_3 = 1$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 则

$\angle O_1AO_3 = 120^\circ$ ,  $\therefore \triangle O_1AO_3$  中, 由余弦定理得:

$O_1O_3^2 = AO_1^2 + AO_3^2 - 2AO_1 \cdot AO_3 \cdot \cos \angle O_1AO_3$ , 有  $1 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2 \cdot \frac{bc}{3} \cdot (-\frac{1}{2})$ ,

$b^2 + c^2 + bc = 3$ , 又  $3 = b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$ , 而

$b+c = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} = \sqrt{3+bc}$ , 得  $b+c$  的最大值为 2.

17. 【解】 (1) 设中位数为  $x$ , 则  $(x-85) \cdot 0.06 = 0.1 \Rightarrow x = 86.67$  .....4分

$\because$  第 3, 4, 5 组人数比为 3:2:1,  $\therefore$  第 4 组选取参加抢答赛的人数  $\frac{3}{6} \times 6 = 3$  人. ....6分

(2) 记其他人为丁、戊、己, 则所有选取的结果共 20 种情况, 其中甲、乙、丙这 3 人至少有 2 人被选取有 10 种情况. 设“甲、乙、丙 3 人至少有 2 人被选取的事件”为  $A$ . 故甲、乙、丙 3 人至

少有 2 人被选取的概率为  $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ . .....12 分

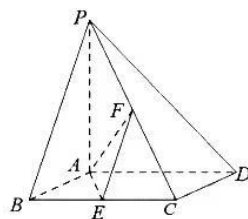
18. 【解】(1) 因为底面  $ABCD$  是菱形,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABC$  为等边三角形,

所以  $AE$  平分  $\angle BAC$ , 所以  $AE \perp AD$ , .....3 分

又因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp AE$ , 且  $PA \cap AD = A$ ,

所以  $AE \perp$  平面  $PAD$ , 又  $AE \subset$  平面  $ABCD$ , .....5 分

所以平面  $ABCD \perp$  平面  $PAD$ ; .....6 分



(2) 连接  $AC$ , 则  $\triangle ABC$  为等边三角形, 由  $PA = AD$ , 得  $PA = AC$ ,  $\triangle PAC$  为等腰直角三角形, 由  $PF = 3$  可得:  $PA = AD = 3\sqrt{2}$ , .....9 分

四棱锥  $F-ABCD$  的体积  $V = \frac{1}{6}sh = \frac{1}{6} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$  .....12 分

19. 【解】(1) 因为  $4ac \cos^2 \frac{B}{2} = 3b^2$ , 所以  $2ac + a^2 + c^2 - b^2 = 3b^2$ , 即  $2ac + a^2 + c^2 = 4b^2$ ,

所以  $(a+c)^2 = 4b^2$ , 所以  $a+c = 2b$ , 所以  $\sin A + \sin C = 2\sin B$ . .....5 分

(2) 因为  $\cos B = \frac{4}{5}$ ,  $B$  为三角形内角, 所以  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3}{5}$ , 因为

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac - 2ac \cos B$ , 又  $a+c = 2b = 6$ ,

所以  $3^2 = 6^2 - 2ac - 2ac \cdot \frac{4}{5}$ , 解得  $a \cdot c = \frac{15}{2}$ , 所以

$S = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{9}{4}$ , 所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{9}{4}$ . .....12 分

20. 【解】(1) 由已知得  $\begin{cases} a = \sqrt{2}c \\ b = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$  解得  $a^2 = 2$ , 所以椭圆  $C$  的方程  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ . .....4 分

(2) 椭圆右焦点坐标  $F(1,0)$ , 显然直线  $AB$  斜率存在, 设

$AB$  的斜率为  $k$ , 则直线  $AB$  的方程为  $y = k(x-1)$  ③

代入椭圆方程  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , 整理得  $(2k^2+1)x^2 - 4k^2x + 2(k^2-1) = 0$ , 易知  $\Delta > 0$  .....6 分

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则有  $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2+1}, x_1x_2 = \frac{2(k^2-1)}{2k^2+1}$  ④

在方程③中，令  $x=2$ ，得  $D(2,k)$ ，从而  $k_1 = \frac{y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1}$ ,  $k_2 = \frac{y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1}$ ,

$$k_3 = \frac{k - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 - 1} = k - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{因为 } k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1} = \frac{(kx_1 - k - \frac{\sqrt{2}}{2})(x_2 - 1) + (kx_2 - k - \frac{\sqrt{2}}{2})(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 - (2k + \frac{\sqrt{2}}{2})(x_1 + x_2) + 2k + \sqrt{2}}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \quad \text{⑤, 将④代入⑤得}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{2k(2k^2 - 2) - (2k + \frac{\sqrt{2}}{2})4k^2 + (2k + \sqrt{2})(2k^2 + 1)}{2k^2 - 2 - 4k^2 + 2k^2 + 1} = 2k - \sqrt{2} \quad \dots\dots 10 \text{分}$$

$$2k_3 = 2(k - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2k - \sqrt{2}, \quad k_1 + k_2 = 2k_3 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2}{4k_3} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots 12 \text{分}$$

21. 【解】(1)  $f'(x) = ae^x - 1$ ，当  $0 < a < 1$  时，令  $f'(x) < 0$ ，可得  $0 < x < \ln \frac{1}{a}$ ；令  $f'(x) > 0$ ，

可得  $x > \ln \frac{1}{a}$ ，所以  $f(x)$  在  $(0, \ln \frac{1}{a})$  上单调递减，在  $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递增。

当  $a=1$  时， $f'(x) > 0$ ，所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，

当  $a > 1$  时， $f'(x) < 0$ ，无解； $f'(x) > 0$ ，所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增。……5分

(2) 证明：当  $a=1$  时，令  $g(x) = e^x - 4x + x^2 + 1$ ，

$g'(x) = e^x - 4 + 2x$ ，令  $h(x) = e^x - 4 + 2x$ ，因为  $h'(x) = e^x + 2 > 0$  恒成立，所以  $g'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增， $g'(0) = -3 < 0$ ,  $g'(1) = e - 2 > 0$ ，由零点存在性定理可得存在  $x_0 \in (0, 1)$ ，

使得  $g'(x_0) = 0$ ，即  $e^{x_0} - 4 + 2x_0 = 0$ ，当  $x \in (-\infty, x_0)$  时， $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减，当

$x \in (x_0, +\infty)$  时， $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增，所以

$$g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - 4x_0 + x_0^2 + 1 = 4 - 2x_0 - 4x_0 + x_0^2 + 1 = x_0^2 - 6x_0 + 5, x_0 \in (0, 1),$$

由二次函数性质得  $g(x)_{\min} > g(1) = 0$ ，所以  $g(x) > 0$ ，即  $f(x) > -x^2 + 3x - 1$ ，得证。



……12分

请考生在第 22、23 题中任选一题做作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 【解】(1)  $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, l: x + y - 2 = 0;$  ………5分

(2)  $l: \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 将其代入椭圆方程, 有  $7t^2 - 2\sqrt{2}t - 10 = 0,$

$M, N$  对应的参数分别为  $t_1, t_2,$  有  $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{7}, t_1 t_2 = -\frac{10}{7},$

$\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$  ………10分

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 解:(1)  $f(x+2) \leq 0 \Rightarrow |x| \leq m, x \in [-1, 1] \Rightarrow m = 1$  ………5分

(2).  $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 2 \Rightarrow a + 2b + 3c = \frac{1}{2}(a + 2b + 3c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow a + 2b + 3c \geq \frac{9}{2}$

……10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

