

2023 届高三 4 月大联考 数学试题

注意事项:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于 y 轴对称, 且 $z_1 = 1 + i$, 则复数 $\frac{z_2}{z_1} =$
 - A. 1
 - B. -1
 - C. i
 - D. -i
2. 设集合 $A = \{x | x < a^2\}, B = \{x | x > a\}$, 若 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = A$, 则实数 a 的取值范围为
 - A. $[0, 1]$
 - B. $[0, 1)$
 - C. $(0, 1)$
 - D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
3. 某地以“绿水青山就是金山银山”理念为引导, 推进绿色发展, 现要订购一批苗木, 苗木长度与售价如下表:

苗木长度 $x(\text{cm})$	38	48	58	68	78	88
售价 $y(\text{元})$	16.8	18.8	20.8	22.8	24	25.8

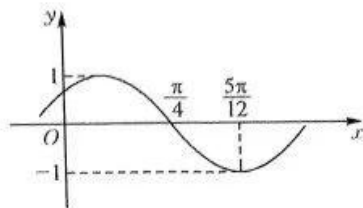
若苗木长度 $x(\text{cm})$ 与售价 $y(\text{元})$ 之间存在线性相关关系, 其回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 8.9$, 则当售价大约为 38.9 元时, 苗木长度大约为

- A. 148 cm
 - B. 150 cm
 - C. 152 cm
 - D. 154 cm
4. $\left(x - \frac{1}{x}\right)(a + y)^6$ 的展开式中, 含 $x^{-1}y^4$ 项的系数为 -15, 则 $a =$
 - A. 1
 - B. -1
 - C. ± 1
 - D. ± 2



5. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 为了得到 $f(x)$ 的图象, 只需将 $g(x) = \cos 3x$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度



6. 已知函数 $f(x) = \lg(|x| - 1) + 2^x + 2^{-x}$, 则不等式 $f(x+1) < f(2x)$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-2, -1)$
C. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

7. 表面积为 15π 的球内有一内接四面体 $PABC$, 其中平面 $ABC \perp$ 平面 PAB , $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形, 则四面体 $PABC$ 体积的最大值为

- A. $\frac{27}{5}$ B. $\frac{32}{15}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{27}{8}$

8. 在平面直角坐标系中, 直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0$) 与 x 轴和 y 轴分别交于 A, B 两点, $|AB| = 2\sqrt{2}$. 若 $CA \perp CB$, 则当 k, m 变化时, 点 C 到点 $(1, 1)$ 的距离的最大值为

- A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 M 在 C 上且 $|MF| = 5$, 则直线 MF 的方程可能为

- A. $3x + 4y - 3 = 0$ B. $4x + 3y - 4 = 0$
C. $3x - 4y - 3 = 0$ D. $4x - 3y - 4 = 0$

10. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$, 其中 $\alpha \neq \frac{n\pi}{2}$ ($n \in \mathbf{Z}$) 且 $\beta \neq \frac{m\pi}{2}$ ($m \in \mathbf{Z}$), 则下列结论一定正确的是

- A. $\sin(\alpha + \beta) = 0$ B. $\cos(\alpha + \beta) = 1$
C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1$ D. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$

11. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3, BC = 2, BB_1 = 1$, 则

- A. A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{6}{7}$
B. A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{4}{7}$
C. 沿长方体的表面从 A 到 C_1 的最短距离为 $3\sqrt{2}$
D. 沿长方体的表面从 A 到 C_1 的最短距离为 $2\sqrt{5}$

12. 下列不等式成立的是

- A. $2^{\sin 1} < \log_2(\sin 1)$ B. $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{2.7}$
C. $\frac{2 \cdot 022^4 + 1}{2 \cdot 022^3 + 1} < \frac{2 \cdot 022^5 + 1}{2 \cdot 022^4 + 1}$ D. $\log_4 3 < \log_6 5$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若向量 $a = (\frac{3}{2}, 1)$, $b = (3, k)$, 且 a, b 共线, 则 $(a-b) \cdot (2a+b) =$ _____.

14. 若直线 $y = ax - 1$ 是函数 $f(x) = x + \ln x$ 的图象在某点处的切线, 则实数 $a =$ _____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若在 C 上存在点 P (不是顶点), 使得 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$, 则 C 的离心率的取值范围为 _____.

16. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列, 且 $a_1 = 3, a_7 = 8$, 对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, $a_{k+1} = a_k + 1$ 与 $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_{k+2}$ 有且仅有一个成立, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7$ 的最小值为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $b \cos C + c \sin B = 0$.

(1) 求 C ; 来源: 高三答案公众号

(2) 若 $c = 4, \sqrt{2}a = (\sqrt{3} + 1)b$, 求 a .

18. (本小题满分 12 分)

记 S_n 为公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 - a_2 = -8a_3 + 8a_4, S_6 = 21$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

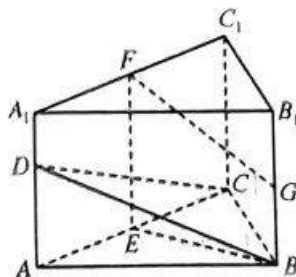
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n^2$, 若由 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大组成数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为棱 AA_1 上的点, E, F, G 分别为 AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AC = AA_1 = 2$.

(1) 求证: $FG \perp AC$;

(2) 若直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求 AD 的长.



20. (本小题满分 12 分)

袋子中有 8 张水果卡片,其中 4 张苹果卡片,4 张梨子卡片. 消费者从该袋子中不放回地随机抽取 4 张卡片,若抽到的 4 张卡片都是同一种水果,则获得一张 10 元代金券;若抽到的 4 张卡片中恰有 3 张卡片是同一种水果,则获得一张 5 元代金券;若抽到的 4 张卡片是其他情况,则不获得任何奖励.

- (1)求某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片都是苹果卡片的概率;
- (2)记随机变量 X 为某位消费者在一次抽奖活动中获得代金券的金额数,求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;
- (3)该商家规定,每位消费者若想再次参加该项抽奖活动,则需支付 2 元. 若你是消费者,是否愿意再次参加该项抽奖活动? 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点与短轴两端点的连线及短轴构成等边三角形,且椭圆经过点 $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- (1)求椭圆 E 的方程;
- (2)不经过点 M 的直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m (m \neq 0)$ 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, A 关于原点的对称点为 R , 直线 MR, MB 与 y 轴分别交于 P, Q 两点, 求证: $|MP| = |MQ|$.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = e^x$.

- (1)求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1 + x + \frac{x^2}{2}$;
- (2)若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2x \ln x + mx + 1$ 恒成立时, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, t]$, 求证: $t > \frac{23}{20}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线