2023 年普通高等学校招生全国统一考试 数学预测卷(八)

专家点评

难度系数: 0.60.

技巧类试题: 第 7 题求解的关键是根据 a,b 的结构特征构造函数,利用导数研究函数的单调性,进而比较 a,b 的大小.

难点试题: 第 12 题结合指数函数与三次函数设题,需要考生利用指对运算灵活转化,对化归与转化思想和逻辑思维能力要求较高.

重要考法: 第 21 题考查存在性和恒成立问题,需要灵活变形,构造函数,将不等式问题转化为函数的最值问题,对考生分析问题、解决问题的能力要求较高.

测试反馈

错题统计:

错因分析:

详解详析 查漏补缺 融会贯通

1. C 【解析】 因为 $M=\{x|y=\sqrt{3x-x^2}\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$, $N=\{x|2x-1>0\}=\{x|x>\frac{1}{2}\}$,所以 $M\cup N=\{x|x\geqslant 0\}$,故选 C.

2. B 【解析】 由 $(1-z)i^3=-2$ 得 $(1-z)\cdot(-i)=-2$,所以 $1-z=\frac{2}{i}=-2i$,则 $z=1+2i$,所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,故选 B.

3. B 【解析】 由频率分布直方图得,前 2 组的频率之和为 $(0.020+0.040)\times5=0.3<0.5$,前 3 组的频率之和为 $(0.020+0.040+0.050)\times5=0.55>0.5$,故中位数在第 3 组,设为 x,则 $0.3+(x-30)\times0.050=0.5$,解得 $x=34$,所以估计网友年龄的中位数为 34 岁.

方法技巧

在频率分布直方图中:(1)众数为最高小长方形底边中点的横坐标;(2)中位数为平分频率分布直方图中小长方形的面积且垂直于横轴的直线与横轴交点的横坐标;(3)平均数为每个小长方形的面积与小长方形底边中点的横坐标的乘积之和.

4. C 【解析】 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,两式联立得, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$,所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,故选 C.

5. B 【解析】 第一步:分别求圆心 C 到两直线的距离

由题,圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10+m(m>-10)$,所以圆心 $C(1,3)$ 到直线 $2x-y-2=0$ 与直线 $2x-y-1=0$ 的距离分别为 $\frac{3}{\sqrt5}$, $\frac{2}{\sqrt5}$,(点到直线的距离公式的应用)

第二步:利用弦心距、半径与弦长间的关系列等式求 m 的值

由题意可知, $\frac{2\sqrt{10+m-\frac{9}{5}}}{2\sqrt{10+m-\frac{4}{5}}}=\frac{1}{\sqrt2}$,(注意弦心距、半径、弦长之间的关系)

解得 $m=-\frac{36}{5}$,

第三步:求圆的面积

所以圆 C 的面积为 $(10+m)\pi=\frac{14}{5}\pi$,故选 B.

6. [illegible] 【[illegible]】 因为 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$, $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$,[illegible]分别将[illegible]

$\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})=-3$, $\therefore\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin 2(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{2\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})}{\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{6})+1}=-\frac{3}{5}$, $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1-\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}{\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{6})+1}=-\frac{4}{5}$, $\therefore\sin(2\alpha+\frac{\pi}{12})=\sin[(2\alpha+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{4}]=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{10}$.(技巧:将所求角变形为已知角与特殊角的差的形式)

7. D 【解题思路】 先观察 a,b 的结构特征,构造合适的函数,通过函数的单调性比较 a,b 的大小,再借助中间值"0"比较 a,c 的大小,即可得结果.

【解析】 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,(关键:根据 a,b 的结构特征构造函数)

则 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x>0\ (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,则 $f(\frac{1}{4})>f(\frac{1}{5})$,即

$\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}+\cos\frac{1}{4}>\frac{1}{5}\sin\frac{1}{5}+\cos\frac{1}{5}$,所以$\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}-\cos\frac{1}{5}>\frac{1}{5}\sin\frac{1}{5}-\cos\frac{1}{4}$,所以 $a>b$. 易知 $c=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{5}}>0$,$a=\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}-\cos\frac{1}{5}<0$,所以 $a<c$.(技巧:借助中间值"0"比较大小)

综上,$b<a<c$,故选 D.

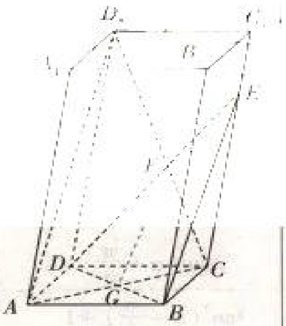
解后反思

本题主要考查数值的比较大小问题,比较大小的方法要依据要比较大小的数(式)的结构特征选择,如本题中,在比较 a,b 的大小时,根据 a,b 的结构特征构造函数 $f(x)=x\sin x+\cos x,x\in(0,\frac{\pi}{2})$,将数值的大小比较问题转化为函数的单调性问题,在比较 a,c 的大小时,借助中间值"0"比较大小.

8. A 【解析】 第一步:找到三棱锥 D_1-ADC 与三棱锥 $E-BCD$ 的公共部分

如图,设 DE,D_1C 交于点 F,AC,BD 交于点 G,连接 FG,则三棱锥 $F-CDG$ 就是三棱锥 D_1-ADC 与三棱锥 $E-BCD$ 的公共部分.

第二步:求公共部分的体积



因为 $CE=3EC_1$,所以 $\frac{D_1F}{FC}=\frac{DD_1}{CE}=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{FC}{D_1C}=\frac{3}{7}$,则点 F 到平面 $ABCD$ 的距离是点 D_1 到平面 $ABCD$ 距离的 $\frac{3}{7}$,又 $S_{\triangle CDG}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$,所以三棱锥 $F-CDG$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}V=\frac{V}{28}$,故选 A.

9. BC 【解析】 A 选项:根据对立事件的概念可知,A_1,A_2 是对立事件,A 错误.

B 选项:由题意可知,$P(B)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{35}{72}$,B 正确.

C 选项:当 A_1 发生时,从乙组抽取 1 人有 9 种可能情况,其中抽取的不是 1 名女生有 5 种可能情况,则 $P(\overline{B}|A_1)=\frac{5}{9}$,C 正确.

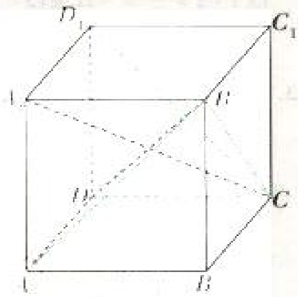
D 选项:当 A_2 发生时,从乙组抽取 1 人有 9 种可能情况,其中抽取的是 1 名女生有 5 种可能情况,则 $P(B|A_2)=\frac{5}{9}$,D 错误.

10. AD 【解题思路】 找到直线 B_1D 与平面 ABB_1A_1、平面 BCC_1B_1 所成的角,根据线面角均为 30°,得到线段间的关系,即可判断 A,B 选项;分别找到直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 所成的角,直线 A_1C 与 AD 所成的角,在直角三角形中求解,即可判断 C,D 选项.

【解析】 A 选项:如图,连接 AB_1,B_1C,由长方体的结构特征可知,$AD\perp$ 平面 ABB_1A_1,$DC\perp$ 平面 BCC_1B_1,则 $\angle DB_1A$,$\angle DB_1C$ 分别为直线 B_1D 与平面 ABB_1A_1、平面 BCC_1B_1 所成的角,(线面角的定义)

所以 $\angle DB_1A=30°$,$\angle DB_1C=30°$,则 $AD=\frac{1}{2}B_1D$,$CD=\frac{1}{2}B_1D$,所以 $AD=CD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AB=BC$,A 正确.

B 选项:因为 $\angle DB_1A=30°$,所以 $\frac{AD}{AB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $AB_1=\sqrt{3}AD$,又 $AB=AD$,所以 $AB_1=\sqrt{3}AB$,在 Rt$\triangle ABB_1$ 中,易得 $BB_1=\sqrt{2}AB$,故 $CC_1=\sqrt{2}AB$,B 错误.



C 选项:连接 CD_1,易知 $\angle A_1CD_1$ 为直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 所成的角,由 A,B 选项可知,$AB=BC$,$CC_1=\sqrt{2}AB$,故在 Rt$\triangle A_1D_1C$ 中,$\cos\angle A_1CD_1=\frac{CD_1}{A_1C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 所成的角为 30°,C 错误.

D 选项:因为 $AD\parallel A_1D_1$,所以 $\angle D_1A_1C$ 为直线 A_1C 与 AD 所成的角,由 C 选项易知,$\angle D_1A_1C=60°$,所以直线 A_1C 与 AD 所成的角为 60°,D 正确.

11. AC 【解析】 A 选项:设 $|BF_1|=m(m>0)$,则 $|AB|=4m$,所以 $|AF_1|=3m$,由椭圆的定义可知,$|BF_2|=2a-|BF_1|=2a-m$,$|AF_2|=2a-|AF_1|=2a-3m$,由 $|BF_2|=\frac{5}{3}|AF_2|$ 得,$2a-m=\frac{5}{3}(2a-3m)$,解得 $m=\frac{1}{3}a$,所以 $|AB|=\frac{4}{3}a$,$|AF_2|=2a-a=a$,$|BF_2|=\frac{5}{3}a$,显然 $|BF_2|^2=|AB|^2+|AF_2|^2$,所以 $AB\perp AF_2$,(勾股定理的逆定理的应用)

所以 $\tan\angle AF_2B=\frac{|AB|}{|AF_2|}=\frac{4}{3}$,A 正确.

B 选项:$|AF_1|=3m=a$,则 $\triangle AF_1F_2$ 为等腰直角三角形,所以 $2c=\sqrt{2}a$,则 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,B 错误.

C 选项:当 $2b=2$ 时,$b=1$,由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $a^2=b^2+c^2$,得 $a=\sqrt{2}$,所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$,C 正确.

D 选项：过 B 作 $BD\perp x$ 轴，垂足为 D，由 B 选项易知，$\triangle BDF_1$ 为等腰直角三角形，所以 $|BD|=|DF_1|=|BF_1|\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{6}a$，则 $|DF_2|=\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{6}a=\frac{7\sqrt{2}}{6}a$，所以直线 BF_2 的斜率的绝对值为 $\frac{|BD|}{|DF_2|}=\frac{1}{7}$，D 错误.

12. BCD 【思维导图】 对于 A：$f(x)=|x|^3-a^x=\begin{cases}x^3-a^x, x\geqslant 0,\\ -x^3-a^x, x<0\end{cases}\xrightarrow{x_1<x_2<0<x_3}0<a<1\to 0<x_3<1\to$ A 错误

对于 B：$a^{x_1}=(-x_1)^3$，$a^{x_2}=(-x_2)^3$，$a^{x_3}=x_3^3$ $\xrightarrow{\text{两边同时取对数}}x_1=3\log_a(-x_1)$，$x_2=3\log_a(-x_2)$，$x_3=3\log_a x_3\xrightarrow{x_2\text{ 为 }x_1,-x_3\text{ 的等比中项}}2x_2=x_1+x_3\to$ B 正确

对于 C：x_2 为 x_1,x_3 的等差中项 $\to 2x_2=x_1+x_3\to 2\log_a(-x_2)=\log_a(-x_1)+\log_a x_3\to x_2^2=-x_1x_3\to\frac{x_3}{x_1}=2\sqrt{2}-3\to$ C 正确

对于 D：函数 $f(x)=|x|^3-a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有三个不同的零点 $\to$ 方程 $a^x=-x^3(x<0)$ 有两个不同的解 [illegible]

[illegible]

[illegible]

【解析】[illegible]

[illegible] 所以 $0<a<1$.

[illegible]

B 选项：由题意可知 [illegible]号两边同时取对数得，$x_1=3\log_a(-x_1)$，$x_2=3\log_a(-x_2)$，$x_3=3\log_a x_3$，由 $x_2^2=-x_1x_3$ 得 $(-x_2)^2=-x_1x_3$，所以 $2\log_a(-x_2)=\log_a(-x_1)+\log_a x_3$，所以 $2x_2=x_1+x_3$，故 x_2 为 x_1,x_3 的等差中项，B 正确.

C 选项：当 x_2 为 x_1,x_3 的等差中项时，$2x_2=x_1+x_3$，所以 $2\log_a(-x_2)=\log_a(-x_1)+\log_a x_3$，（注意利用 B 选项得到的等式）

则 $(-x_2)^2=-x_1x_3$，所以 $x_2^2=-x_1x_3$，由 $\begin{cases}2x_2=x_1+x_3,\\ x_2^2=-x_1x_3,\end{cases}$ 整理得 $x_3^2+6x_1x_3+x_1^2=0$，所以 $\frac{x_3}{x_1}=2\sqrt{2}-3$ 或 $\frac{x_3}{x_1}=-2\sqrt{2}-3$（舍去），C 正确.（易错：注意利用 $2x_2=x_1+x_3<0$，$x_1<0$，得到 $\frac{x_3}{x_1}>-1$，避免产生增根）

D 选项：当 $x<0$ 时，易知方程 $a^x=-x^3$ 有两个不同的解，等号两边同时取对数得，$x\ln a=3\ln(-x)$，令 $g(x)=x\ln a-3\ln(-x)(x<0)$，则 $g'(x)=\ln a-\frac{3}{x}=\frac{\ln a(x-\frac{3}{\ln a})}{x}$. 令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{3}{\ln a}$，由 A 选项知 $0<a<1$，所以 $\ln a<0$，$\frac{3}{\ln a}<0$，又 $x<0$，所以当 $\frac{3}{\ln a}<x<0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x<\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(\frac{3}{\ln a},0)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\frac{3}{\ln a})$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\min}=g(\frac{3}{\ln a})=3-3\ln(-\frac{3}{\ln a})$. 又当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to 0^-$ 时，$g(x)\to+\infty$，故要使 $g(x)$ 有两个零点，只需 $g(x)_{\min}=3-3\ln(-\frac{3}{\ln a})<0$，即 $\ln(-\frac{3}{\ln a})>1=\ln e$，所以 $-\frac{3}{\ln a}>e$，解得 $a>e^{-\frac{3}{e}}$，又 $0<a<1$，故实数 a 的取值范围为 $(e^{-\frac{3}{e}},1)$，D 正确.

方法技巧

利用函数零点求参数取值范围的方法及步骤

(1) 常用方法：①直接法，先根据题设条件构建关于参数的不等式（组），再通过解不等式（组）确定参数的取值范围；②分离参数法，将参数分离，转化成求函数值域问题加以解决；③数形结合法，先将问题转化为两函数图象的交点问题，再在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，然后数形结合求解.

(2) 一般步骤：先转化，把已知函数零点的存在情况转化为方程（组）的解、不等式（组）的解集或两函数图象的交点的情况；再列式，根据零点存在定理或结合函数图象列式；最后得结论，求出参数的取值范围或根据图象得出参数的取值范围.

[illegible] 由题可得 $f(-\frac{23}{8})=f(-\frac{23}{8}+\frac{3}{2})=f(-\frac{11}{8})=f(-\frac{11}{8}+\frac{3}{2})=f(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}|\log_2\frac{1}{8}|=\frac{3}{8}$.

14. -77 【解析】 第一步：写出 $(y-x)^7$ 的展开式的通项公式

$(y-x)^7$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=(-1)^r C_7^r x^r y^{7-r}$，

第二步：分类讨论求 x^4y^4 的系数

$xT_{r+1}=(-1)^r C_7^r x^{r+1}y^{7-r}$，当 $r=3$ 时，x^4y^4 的系数为 -35；$-\frac{2x^2}{y}T_{r+1}=-2\times(-1)^r C_7^r x^{r+2}y^{6-r}$，当 $r=2$ 时，x^4y^4 的系数为 -42.

第三步：得结果

故展开式中 x^4y^4 的系数为 -77.

方法技巧

求形如 $(a+b)^m(c+d)^n(m,n\in\mathbf{N}^*)$ 的式子的展开式中与特定项相关的量的步骤：第一步，根据二项式定理把 $(a+b)^m$ 与 $(c+d)^n$ 分别展开，并写出其通项公式；第二步，根据特定项的次数，分析特定项可由 $(a+b)^m$ 与 $(c+d)^n$ 的展开式中的哪些项相乘得到；第三步，把相乘后的项合并即可得到所求特定项或其相关量.

15. -1 【思维导图】 由题$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}\xrightarrow{f(\frac{T}{4})=1}\cos\varphi=\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{0<\varphi<\pi}\varphi=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{x=-\frac{\pi}{6}\text{是}f(x)\text{的一个极大值点}}\omega=12k+1,k\in$

$\mathbf{Z}\xrightarrow{\omega>0}\omega$ 的最小值为 $1\rightarrow f(\frac{3\pi}{2})$

【解析】 由题意可知，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，则$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}$，由$f(\frac{T}{4})=1$得$f(\frac{\pi}{2\omega})=2\sin(\omega\times\frac{\pi}{2\omega}+\varphi)=2\cos\varphi=1$，所以$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，由$x=-\frac{\pi}{6}$是$f(x)$的一个极大值点得，$-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，（提示：利用正弦函数的极大值点列等式）

所以$\omega=12k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，又$\omega>0$，所以ω的最小值为1，此时$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，故$f(\frac{3\pi}{2})=2\sin(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=-2\cos\frac{\pi}{3}=-1$.

16. 【思维导图】 设过点$Q(4,0)$的直线方程为$x=my+4$，[illegible]

$\rightarrow y_Ay_B=-8p$，$y_Cy_D=-8p$，设$A(\frac{2t^2}{p},2t)(t\neq0$且$t\neq\pm\frac{p}{2})$，则$B(\frac{8p}{t^2},-\frac{4p}{t})$，设直线$AD$的方程为$x=ny+\frac{p}{2}(n\neq0)$，[illegible] $y_Ay_D=-p^2$，[illegible] $C(\frac{8\times16t^2}{p^3},\frac{16t}{p})$，由$k_{AD}=4k_{BC}$，[illegible]式，即可得$p$的值.

【解析】 设过$Q(4,0)$的直线方程为$x=my+4$，由$\begin{cases}x=my+4,\\y^2=2px,\end{cases}$整理得$y^2-2pmy-8p=0$，所以$y_Ay_B=-8p$，$y_Cy_D=-8p$，（提示：利用直线$AB$，$CD$均过点$Q$及根与系数的关系可得）

设$A(\frac{2t^2}{p},2t)(t\neq0$且$t\neq\pm\frac{p}{2})$，则$B(\frac{8p}{t^2},-\frac{4p}{t})$，设直线$AD$的方程为$x=ny+\frac{p}{2}(n\neq0)$，（提示：直线$AD$的斜率不为0）

由$\begin{cases}x=ny+\frac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$整理得$y^2-2pny-p^2=0$，所以$y_Ay_D=-p^2$，则$y_D=-\frac{p^2}{y_A}=-\frac{p^2}{2t}$，$x_D=\frac{p^3}{8t^2}$，即$D(\frac{p^3}{8t^2},-\frac{p^2}{2t})$. 因为$y_Cy_D=-8p$，所以$y_C=-\frac{8p}{y_D}=\frac{16t}{p}$，则$x_C=\frac{8\times16t^2}{p^3}$，即$C(\frac{8\times16t^2}{p^3},\frac{16t}{p})$. 所以$k_{AD}=k_{AF}=\frac{2t}{\frac{2t^2}{p}-\frac{p}{2}}=\frac{4pt}{4t^2-p^2}$，$k_{BC}=$

$\frac{\frac{16t}{p}+\frac{4p}{t}}{\frac{8\times16t^2}{p^3}-\frac{8p}{t^2}}=\frac{4p^2t^3+p^4t}{32t^4-2p^4}=\frac{p^2t(4t^2+p^2)}{2(4t^2-p^2)(4t^2+p^2)}=$

$\frac{p^2t}{2(4t^2-p^2)}$，由$k_{AD}=4k_{BC}$得，$\frac{4pt}{4t^2-p^2}=4\times\frac{p^2t}{2(4t^2-p^2)}$，整理得$(4t^2-p^2)(2-p)=0$，因为$t\neq\pm\frac{p}{2}$，所以$p=2$.

17.【思维导图】 (1)已知$\rightarrow\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=13\\a_1q^2-a_1q=6\end{cases}\xrightarrow{q>0}q=3$，$a_1=1\rightarrow a_n=3^{n-1}$

(2)由(1)$\rightarrow\frac{\log_3a_n}{a_n}=\frac{n-1}{3^{n-1}}\xrightarrow{\text{错位相减法}}T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{4\times3^{n-1}}$

解：(1)由$S_3=13$，$a_3-a_2=6$，得$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=13\\a_1q^2-a_1q=6\end{cases}$， (2分)

消去a_1，得$7q^2-19q-6=0$，即$(q-3)(7q+2)=0$.

因为$q>0$，所以$q=3$， (4分)

于是$a_1=1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n-1}$. (5分)

(2)由(1)可得$\frac{\log_3a_n}{a_n}=\frac{\log_33^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{n-1}{3^{n-1}}$. (6分)

则$T_n=\frac{0}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}$，

$\frac{1}{3}T_n=\frac{0}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-2}{3^{n-1}}+\frac{n-1}{3^n}$， (7分)

两式作差，得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n-1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n-1}{3^n}=\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]-\frac{n-1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2\times3^n}$，（易错：运用错位相减法求和时注意最后一项要变号） (9分)

所以$T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{4\times3^{n-1}}$. (10分)

名师指引

高考对数列的考查主要围绕等差数列和等比数列展开，考查的知识包括等差数列和等比数列的定义、通项、求和等. 递推数列和数列中的新定义问题也是高考数列命题的一大亮点，也是未来高考考查数列问题的一大趋势，重在考查考生的逻辑思维、分析问题和解决问题的能力.

18.【思维导图】 (1)$2\sin C-\sin B=\tan A\cos B\to 2\cos A\sin C=\sin C\xrightarrow{A,C\in(0,\pi)}A=\dfrac{\pi}{3}$

(2)$A=\dfrac{\pi}{3},a=2\xrightarrow{\text{正弦定理}}b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin B,c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin C\xrightarrow{B=\frac{2\pi}{3}-C}2c-b=4\sin(C-\dfrac{\pi}{6})\xrightarrow[\text{正弦函数的单调性}]{0<C<\frac{2\pi}{3}}2c-b$ 的取值范围

解:(1)由题意可知,$2\sin C-\sin B=\dfrac{\sin A}{\cos A}\times\cos B$,(关键:切化弦,为后面的变换做准备)

所以 $2\cos A\sin C-\cos A\sin B=\sin A\cos B$, (1 分)

则 $2\cos A\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C$,(两角和的正弦公式、三角形内角和定理、诱导公式的应用) (3 分)

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq0$,所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$,(注意三角形内角的取值范围) (4 分)

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. (6 分)

(2)【分解】 由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$,

同理,$c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$, (7 分)

由 $B+C=\dfrac{2\pi}{3}$ 得,$B=\dfrac{2\pi}{3}-C$. (8 分)

所以 $2c-b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(2\sin C-\sin B)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}[2\sin C-\sin(\dfrac{2\pi}{3}-C)]=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\dfrac{3}{2}\sin C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C)=4\sin(C-\dfrac{\pi}{6})$,(两角差的正弦公式的应用) (10 分)

因为 $0<C<\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $-\dfrac{\pi}{6}<C-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$, (11 分)

所以 $-\dfrac{1}{2}<\sin(C-\dfrac{\pi}{6})<1$,则 $-2<2c-b<4$,(正弦函数的单调性的应用)

故 $2c-b$ 的取值范围为 $(-2,4)$. (12 分)

优解 由(1)得 $2\sin C-\sin B=\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A}$,

由正弦定理得 $2c-b=\dfrac{a\cos B}{\cos A}$, (8 分)

又 $a=2,A=\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $2c-b=4\cos B$. (10 分)

因为 $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$,所以 $\cos B\in(-\dfrac{1}{2},1)$,

故 $2c-b\in(-2,4)$,

即 $2c-b$ 的取值范围为 $(-2,4)$. (12 分)

解题关键

求解本题第(1)问的关键是灵活利用同角三角函数的基本关系、两角和的正弦公式、三角形内角和定理等对已知等式进行变形;求解本题第(2)问的关键是将 $2c-b$ 表示为关于某个内角的函数,利用三角函数的图象与性质求取值范围.

19.【信息提取】 [1]中国数字经济规模统计表;[2]参考数据及参考公式;[3]两组数据相吻合的定义.

解:(1)$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4,\bar{y}\approx31.457$,

$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$,(由[1][2]得) (2 分)

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}\approx\dfrac{1\ 003.3-7\times4\times31.457}{140-7\times4^2}\approx4.375$, (4 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx31.457-4.375\times4\approx13.96$,(由[1][2]得) (5 分)

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=4.38x+13.96$. (6 分)

(2)当 $x=8$ 时,$\hat{y}=4.38\times8+13.96=49$,

当 $x=9$ 时,$\hat{y}=4.38\times9+13.96=53.38$,

当 $x=10$ 时,$\hat{y}=4.38\times10+13.96=57.76$, (9 分)

因为 $(49-54.3)^2+(53.38-60.6)^2+(57.76-68.3)^2=191.31$,$\sqrt{\dfrac{191.31}{3}}>\sqrt{49}=7$,

$0.1M=0.1\times68.3=6.83<7$, (11 分)

所以所得预测数据与表中预测数据不吻合.(由[3]得) (12 分)

20.【解题思路】 (1)连接 AC_1,A_1C,设 A_1C 与 DE 交于点 F,利用平面几何的知识证得 $DE\perp A_1C$,$\triangle AA_1C$ 为等边三角形,连接 A_1D,由 $\triangle ABC$ 为等边三角形及 $BD=\sqrt{3}$ 得 $BD\perp AC$,$A_1D=\sqrt{3}$,利用勾股定理的逆定理得到 $A_1D\perp BD$,利用线面垂直的判定定理得到 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1,进而得到 $BD\perp A_1C$,再利用线面垂直的判定定理得到 $A_1C\perp$ 平面 BDE,易得 A_1F 为点 A_1 到平面 BDE 的距离,根据线段间的关系求解即可;(2)建立合适的空间直角坐标系,写出相关点及向量的坐标,分别求出平面 BDE 和平面 A_1BE 的一个法向量,利用向量的夹角公式即可得解.

解:(1)连接 AC_1,A_1C,设 A_1C 与 DE 交于点 F,

由 $AA_1=AC$ 可知,侧面 ACC_1A_1 为菱形,所以 $AC_1\perp A_1C$,

因为点 D,E 分别为 AC,CC_1 的中点,所以 $DE//AC_1$,

则 $DE\perp A_1C$. (1 分)

因为 $\angle CED=30°$,所以 $\angle CC_1A=30°$.

则$\angle A_1AC=2\angle CC_1A=60°$，又$AC=AA_1$，

所以$\triangle AA_1C$为等边三角形，（2分）

由$\triangle ABC$为等边三角形，$BD=\sqrt{3}$，得$AC=2$，

连接A_1D，则$A_1D\perp AC$，$A_1D=\sqrt{3}$.

又$A_1B=\sqrt{6}$，$BD=\sqrt{3}$，所以$A_1B^2=BD^2+A_1D^2$，则$A_1D\perp BD$.（勾股定理的逆定理的应用）（3分）

易知$BD\perp AC$，因为$AC\cap A_1D=D$，$AC\subset$平面ACC_1A_1，$A_1D\subset$平面ACC_1A_1，

所以$BD\perp$平面ACC_1A_1，（利用线面垂直的判定定理时，注意说明平面内的两直线相交于一点）

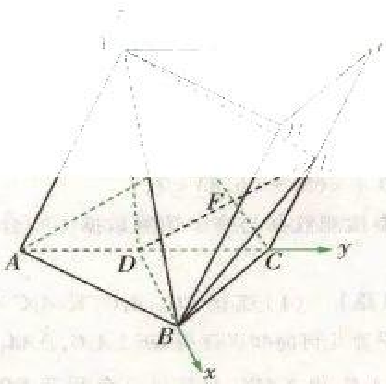
又$A_1C\subset$平面ACC_1A_1，所以$BD\perp A_1C$.（线面垂直的性质的应用）（4分）

因为$BD\cap DE=D$，$BD\subset$平面BDE，$DE\subset$平面BDE，

所以$A_1C\perp$平面BDE.（5分）

所以A_1F为点A_1到平面BDE的距离.

又$A_1F=\frac{3}{4}A_1C=\frac{3}{2}$，故点$A_1$到平面$BDE$的距离为$\frac{3}{2}$.（6分）



则$C(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$E(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.（8分）

由(1)知平面BDE的一个法向量为$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$.（9分）

设平面A_1BE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{3}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ -\sqrt{3}x+\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取$y=1$，则

$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.（技巧：观察方程组的特点，所取的值尽可能使$\boldsymbol{n}$简单）（10分）

于是$\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{A_1C}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1-3}{2\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$.（11分）

因为二面角A_1-BE-D为锐二面角，

所以二面角A_1-BE-D的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.（易错：注意判断二面角为锐二面角还是钝二面角）（12分）

方法总结

求点到平面的距离的3种方法

①利用法向量求点到平面的距离：设$\boldsymbol{n}$是平面α的一个法向量，AB是平面α的一条斜线，其中$A\in\alpha$，则点B到平面α的距离为$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

②等体积法：立体几何中求点到平面距离的一种常用方法，使用这种方法的关键是找到易于求出底面的面积及对应底面上的高的底面.

③几何法：点到平面的距离，有时可转化为与所求距离……点

$(x\in[e^2,e^3])$恒成立$\xrightarrow{设h(x)=\frac{\ln x-9+e^3}{x},x\in[e^2,e^3]}h'(x)<0\to h(x)_{\min}\to a+1<h(x)_{\min}\xrightarrow{a>-1}$实数$a$的取值范围

解：(1)由$f(x)=(x-4)e^x-x^2+6x$，

得$f'(x)=(x-3)e^x-2x+6=(x-3)(e^x-2)$，

令$f'(x)=0$，得$x=3$或$x=\ln 2$，（1分）

列表：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

（2分）

由表可知，当$x=\ln 2$时，$f(x)$取得极大值，为$f(\ln 2)=(\ln 2-4)e^{\ln 2}-(\ln 2)^2+6\ln 2=-(\ln 2)^2+8\ln 2-8$，

当$x=3$时，$f(x)$取得极小值，为$f(3)=(3-4)\times e^3-3^2+18=9-e^3$.（4分）

(2)由(1)知，$f(x)$在$[1,3]$上单调递减，所以当$x\in[1,3]$时$f(x)_{\min}=f(3)=9-e^3$，（5分）

于是若存在 $x_1\in[1,3]$，对任意的 $x_2\in[e^2,e^3]$，使得不等式 $g(x_2)>f(x_1)$ 成立，则 $\ln x-(a+1)x>9-e^3(a>-1)$ 在 $[e^2,e^3]$ 上恒成立，（6 分）

即 $a+1<\dfrac{\ln x-9+e^3}{x}(x\in[e^2,e^3])$ 恒成立.（技巧：参变分离）（7 分）

令 $h(x)=\dfrac{\ln x-9+e^3}{x},x\in[e^2,e^3]$，则 $a+1<h(x)_{\min}$.

（构造函数，将不等式恒成立问题转化为函数的最值问题）（8 分）

$h'(x)=\dfrac{10-e^3-\ln x}{x^2}$，

易得 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 单调递减，

故 $h(x)_{\min}=h(e^3)=\dfrac{\ln e^3+e^3-9}{e^3}=\dfrac{e^3-6}{e^3}=1-\dfrac{6}{e^3}$.（10 分）

于是 $a+1<1-\dfrac{6}{e^3}$，得 $a<-\dfrac{6}{e^3}$，

又 $a>-1$，（易错：注意 a 的取值范围）

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-1,-\dfrac{6}{e^3}\right)$.（12 分）

由不等式有解或恒成立求参数的取值范围或最值的基本方法有两种：一是分离参数法，即通过分离参数将问题转化为新函数的最值问题进行处理；二是直接将问题转化为含参函数的最值问题，利用分类讨论思想求解.

22．解 (1)第一步：

由题意可知，$\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1,\\ 2a=2\sqrt{6},\end{cases}$（双曲线的定义的应用）（2 分）

第二步：解方程组得 C 的标准方程

得 $a=\sqrt{6},b=\sqrt{2}$，（3 分）

所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$.（4 分）

(2)第一步：设直线方程，联立直线与双曲线的方程，得到根与系数的关系

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{1}{3}x+m$ $(m\neq0)$，（注意题中条件：点 P 不在直线上）

由 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x+m,\\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $\dfrac{2}{3}x^2-2mx-3m^2-6=0$，

$\Delta=(-2m)^2-4\times\dfrac{2}{3}(-3m^2-6)=12m^2+16>0$，（直线与双曲线有两个交点，需要满足判别式大于零）

则 $x_1+x_2=3m$.

第二步：对直线 PM,QN 的斜率情况分类讨论，求 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 的值

由题意知，$Q(-3,-1)$，

当直线 PM,QN 的斜率均存在时，

$k_{PM}=\dfrac{y_1-1}{x_1-3}=\dfrac{\frac{1}{3}x_1+m-1}{x_1-3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_1-3}$，

$k_{QN}=\dfrac{y_2+1}{x_2+3}=\dfrac{\frac{1}{3}x_2+m+1}{x_2+3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_2+3}$，

所以直线 PM 的方程为 $y-1=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_1-3}\right)(x-3)$，（直线的点斜式方程）

直线 QN 的方程为 $y+1=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_2+3}\right)(x+3)$.（7 分）

两方程联立得，$x_0=-\dfrac{3(x_1+x_2)}{x_1-x_2-6}=-\dfrac{9m}{x_1-x_2-6}$，显然 $x_0\neq0$，

又 $y_0=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_1-3}\right)x_0-\dfrac{3m}{x_1-3}$，（提示：点 D 在直线 PM 上）

所以 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_1-3}+\dfrac{3m}{x_1-3}\times\dfrac{x_1-x_2-6}{9m}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{m}{x_1-3}+\dfrac{x_1-x_2-6}{3(x_1-3)}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2(x_1-3)}{3(x_1-3)}$

$=1$.（9 分）

当直线 PM 的斜率不存在时，

易求得直线 PM 的方程为 $x=3$，直线 QN 的方程为 $y=\dfrac{2}{3}x+1$，

则 $x_0=3,y_0=3$，所以 $\dfrac{y_0}{x_0}=1$.（10 分）

当直线 QN 的斜率不存在时，

易求得直线 QN 的方程为 $x=-3$，直线 PM 的方程为 $y=\dfrac{2}{3}x-1$，

则 $x_0=-3,y_0=-3$，所以 $\dfrac{y_0}{x_0}=1$.（11 分）

第三步：整合结论

综上，$\dfrac{y_0}{x_0}=1$.（12 分）

名师指引

直线与圆锥曲线的位置关系的综合问题是高考命题的热点，解决此类问题要做好两点：一是转化，把题中的已知和所求准确转化为代数中的数与式，即形向数的转化；二是设而不求，即联立直线与圆锥曲线的方程，利用根与系数的关系求解.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。