2022届苏北四市高三年级第一次调研测试

数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设全集$U=R$，集合$A=\{x|1<x<4\}$，集合$B=\{x|0<x<2\}$，则$A\cap(C_U B)=$

A.$(1,2)$　　B.$(1,2]$　　C.$(2,4)$　　D.$[2,4)$

【答案】D

【解析】因为$C_U B=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，所以$A\cap(C_U B)=[2,4)$，故选D.

2.已知复数z满足$z(1+i)=4i$，则$|z|=$

A.2　　B.$\sqrt{2}$　　C.$2\sqrt{2}$　　D.$4\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】依题意$|z|=\left|\frac{4i}{1+i}\right|=2\sqrt{2}$，故选C.

3.不等式$x-\frac{1}{x}>0$成立的一个充分条件是

A.$x<-1$　　B.$x>-1$　　C.$-1<x<0$　　D.$0<x<1$

【答案】C

【解析】因为$x-\frac{1}{x}>0$，所以$x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$，故$0>x>-1$为充分条件，故选C.

4.某地元旦汇演有2男3女工5名主持人站成一排，则舞台站位时男女间隔的不同排法共有

A.12种　　B.24种　　C.72种　　D.120种

【答案】A

【解析】依题意$A_3^3\cdot A_2^2=12$，故选A.

5.已知向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(2,y)$，$\vec{c}=(1,-2)$，且$\vec{a}/\!/\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，则$|2\vec{a}-\vec{b}|=$

A.3　　B.$\sqrt{10}$　　C.$\sqrt{11}$　　D.$2\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】因为$\vec{a}/\!/\vec{c}, -2x=1$,，又$\vec{b}\perp\vec{c}, -2y-2=0$, 所以$x=-\frac{1}{2}, y=1$，

所以$|2\vec{a}-\vec{b}|=\left|2(-\frac{1}{2},1)-(2,1)\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$，故选 B.

6.已知抛物线$C_1: y^2=2px(p>0)$的焦点F为椭圆$C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$得右焦点，且$C_1$与$C_2$的公共弦经过$F$，则椭圆的离心率为

A.$\sqrt{2}-1$　　B.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

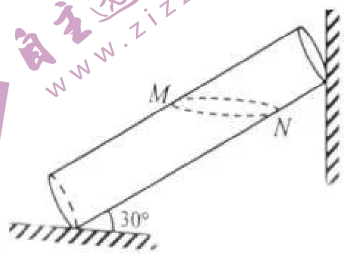
【答案】A

【解析】依题意$\frac{b^2}{a}=2c\therefore e^2+2e-1=0\therefore e=\sqrt{2}-1$，故选 A.

7.如图，一个装有某种液体的圆柱形容器固定在墙面和地面的角落内，容器与地面所成的角为$30°$，液面呈椭圆形，椭圆长轴上的顶点M，N到容器底部的距离分别是12和18，则容器内液体的体积是

A.15π　　B.36π

C.45π　　D.48π



【答案】C

【解析】$V=\pi r^2h=\pi(\frac{(18-12)\tan 30°}{2})^2\times\frac{12+18}{2}=45\pi$，故选 C.

8.记$[x]$表示不超过实数x的最大整数，记$a_n=[\log_8 n]$，则$\sum_{i=1}^{2022}a_i$的值为

A.5479　　B.5485　　C.5475　　D.5482

【答案】B

【解析】由题意，当$8^k\leqslant n<8^{k+1}(k\in\mathbf{N})$时，$a_n=k$，

因为$8^0=1,8^1=8,8^2=64,8^3=512,8^4=4096>2022$，

所以$\sum_{i=1}^{2022}a_i=0\times7+1\times56+2\times448+3\times1511=5485$.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9.已知$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中共有7项，则

A.所有项的二项式系数和为64　　B.所有项的系数和为1

C.二项式系数最大的项为第4项　　D.有理项共4项

【答案】ACD

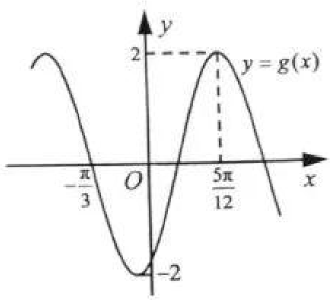
【解析】由题意可知，$n=6$，易知二项式系数和为$2^6=64$，即A正确；

取$x=1$，则各项系数和为$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，即B错误；

二项式系数最大为C_6^3，即C正确；

在二项式系数$C_6^k(k=0,1,2,3,4,5,6)$中，仅当$k=0,2,4,6$时，所在项为有理项，即D正确.

10.将函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到$y=g(x)$的图象如图，则



A. $f(x)$为奇函数

B. $f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

C.方程$f(x)=1$在$(0,2\pi)$内有4个实数根

D. $f(x)$的解析式可以是$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】BC

【解析】由题意可知，$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，且由图可知，$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，即$T=\pi$

因为$g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=f(0)\neq 0$，所以$f(x)$不是奇函数，即 A 错误；

因为$g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调递增，所以$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增，即 B 正确；

因为$2\pi=2T$，且$f(0)=g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq\dfrac{1}{2}$，结合图象可知，C 正确；

若$A>0,\omega>0$，则由图可知，$A=2$，且$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，又$g\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=2$，可知道 D 错误.

11.在平面直角坐标系xOy中，若对于曲线$y=f(x)$上的任意点P，都存在曲线$y=f(x)$上的点Q，使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$成立，则称函数$f(x)$具备“$\otimes$性质”.则下列函数具备“$\otimes$性质”的是

A. $y=x+1$ B. $y=\cos^2 x$ C. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ D. $y=e^x-2$

【答案】BD

【解析】设$P(x_1,f(x_1)),Q(x_2,f(x_2))$，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+f(x_1)f(x_2)=0$，

对于 A，则$x_1x_2+(x_1+1)(x_2+1)=0$，即$(2x_1+1)x_2+x_1+1=0$，

当$x_1=-\dfrac{1}{2}$时，不存在符合题意的x_2，即 A 错误；

对于 B，则$x_1x_2+\cos^2 x_1\cdot\cos^2 x_2=0$，设$f(x_2)=x_1x_2+\cos^2 x_1\cdot\cos^2 x_2$，

若$x_1\leqslant 0$，则$f(0)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}x_1\cdot\cos^2 x_1\leqslant 0$，所以存在$x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$满足题意，

若$x_1>0$，则$f(0)\cdot f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}x_1\cdot\cos^2 x_1\leqslant 0$，即存在$x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$满足题意，即 B 正确

对于 D，则$x_1x_2+\left(e^{x_1}-2\right)\left(e^{x_2}-2\right)=0$，设$f(x_2)=x_1x_2+\left(e^{x_1}-2\right)\left(e^{x_2}-2\right)$，

若$x_1<\ln 2$，则$f(0)=2-e^{x_1}>0$，且当$x_2\to+\infty$时，$f(x_2)<0$，所以存在$x_2>$ 符合题意

若 $x_1 \geqslant \ln 2$，则 $f(0)=2-e^{x_1} \leqslant 0, f(\ln 2)=\ln 2 \cdot x_1 > 0$，所以存在 $x_2 \in [0,\ln 2)$ 符合题意，

即 D 正确.

注：若从数形结合来看，对任意 P，存在 Q，使得 $OQ \perp OP$，

则 $f(x)$ 的图像应把原点“半包围”，所以选择 BD.

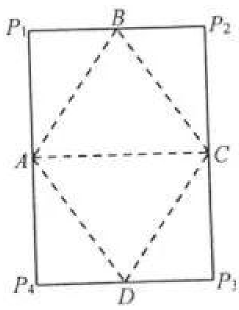
12.如图，一张长、宽分别为 $\sqrt{2}$，1的矩形纸，A，B，C，D 分别是其四条边的中点.现将其沿图中虚线折起，使得 P_1，P_2，P_3，P_4 四点重合为一点 P，从而得到一个多面体，则

A.在该多面体中，$BD=2$

B.该多面体是三棱锥

C.在该多面体中，平面 $BAD \perp$ 平面 BCD

D.该多面体的体积为 $\dfrac{1}{12}$



【答案】BCD

【解析】因为要沿 AC 折起，所以 $BD<\sqrt{2}$，即 A 错误；

因为 PB,PA,PC 两两垂直，且 PD,PA,PC 两两垂直，所以 P,B,D 共线，即 B 正确；

由 B 可知，$\angle APC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，且 $PA=PC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, AC=1$，

所以 $\angle APC=\dfrac{\pi}{2}$，即 C 正确；

$V=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$，即 D 正确.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知直线 $l: x+y-m=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，O 为原点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则实数 m 的值为_______.

【答案】$\pm\sqrt{6}$

【解析】因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2^2\cdot\cos\angle BOA=2$，即 $\cos\angle BOA=\dfrac{1}{2}$，即 $\angle BOA=\dfrac{\pi}{3}$，

因为半径 $r=2$，所以圆心到直线的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，则 $m=\pm\sqrt{6}$.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2-x$，则 $f\left(\frac{7}{2}\right)$ 的值为_______.

【答案】-2

【解析】$f\left(\frac{7}{2}\right)=2f\left(\frac{5}{2}\right)=4f\left(\frac{3}{2}\right)=8f\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=-2$.

15. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_______.

【答案】-7

【解析】因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，且 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}=-7$.

16. 已知一个楞长为 a 的正方体木块可以在一个圆锥形容器内任意转动，若圆锥的底面半径为2，母线长为4，则 a 的最大值为_______.

【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】当棱长为 a 的正方形木块自由转动时，形成一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的球，

又该圆锥的轴截面为边长为4的等边三角形，则该三角形的内切圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

解得 $a\leqslant\frac{4}{3}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

在①$b\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sqrt{3}c\cos B$，②$2S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，③$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并进行解答.

问题:在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且______.

（1）求角B；

（2）若ΔABC是锐角三角形，且$c=4$，求a得取值范围.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【解析】（1）若选①，因为$b\cos(\frac{\pi}{2}-C)=\sqrt{3}c\cos B$,所以$b\sin C=\sqrt{3}c\cos B$,

又由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\tan B=\sqrt{3}$，所以在$\Delta ABC$中，$B=\frac{\pi}{3}$；

若选②，因为$2S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$,所以$ac\sin B=\sqrt{3}ac\cos B$,

所以$\tan B=\sqrt{3}$，所以在ΔABC中，$B=\frac{\pi}{3}$；

若选③，因为$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$，又$\tan B=\tan(\pi-A-B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

所以$\tan B=\sqrt{3}$，所以在ΔABC中，$B=\frac{\pi}{3}$；

（2）因为$B=\frac{\pi}{3}$,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$知，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=4\frac{\sin(\frac{2}{3}\pi-C)}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2$,

在锐角ΔABC中$\begin{cases}0<\frac{2}{3}\pi-C<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$,$\therefore\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}\therefore\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,$\therefore a\in(2,8)$.

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_2=15$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$.

（1）设$b_n=a_{n+1}-a_n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=10-\log_2(a_n+1)$，求数列$\{|c_n|\}$的前 **20** 项和T_{20}.

【解析】（1）因为$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$，所以$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)=4^n(a_2-a_1)$，

所以$b_n=4^{n-1}(a_2-a_1)=3\cdot4^n$

（2）由(1)知$b_n=a_{n+1}-a_n=3\cdot4^n=(4^{n+1}-1)-(4^n-1)$，所以$a_n=4^n-1$，

所以$c_n=10-\log_2(a_n+1)=1-2n$，

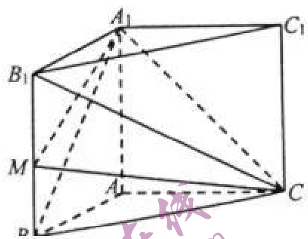
所以$|c_n|=\begin{cases}10-2n(n\le5)\\2n\text{-}10(n\ge6)\end{cases}$，$T_{20}=(8+6+4+2+0)+(2+...+30)=260$

19.（12分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1$，$A_1B\perp B_1C$.

（1）证明：$AB\perp AC$；

（2）设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BB_1}$，若二面角$A_1-MC-C_1$的大小为$\frac{\pi}{4}$，求$\lambda$.



【答案】（1）见解析；（2）$\lambda=\frac{1}{2}$

解：（1）连接AB_1，在直三棱柱中，因为$AA_1\perp$平面ABC，且$AB,AC\subset$平面ABC，

所以$AA_1\perp AB,AA_1\perp AC$，又$AA_1=AB$，所以四变形$AA_1B_1B$为正方形，所以$AB_1\perp A_1B$，

又因为$A_1B\perp B_1C$，且$AB_1\cap B_1C=B_1,AB_1,B_1C\subset$平面$B_1AC$，所以$A_1B\perp$平面$B_1AC$，

因为$AC\subset$平面B_1AC，所以$A_1B\perp AC$，

又$AA_1\perp AC,AA_1\cap A_1B=A_1,AA_1,A_1B\subset$平面$AA_1B_1B$，所以$AC\perp$平面$AA_1B_1B$，

因为$AB\subset$平面AA_1B_1B，所以$AB\perp AC$；

（2）设$AB=AC=AA_1=1$，以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\}$为$x,y,z$轴，建立空间直角坐标系，

则$A_1(0,0,1),C(0,1,0),C_1(0,1,1),M(1,0,\lambda)$，则$\overrightarrow{CM}=(1,-1,\lambda),\overrightarrow{CA_1}=(0,-1,1),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$，

设平面C_1CM的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=z_1=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=x_1-y_1+\lambda z_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=1$，则 $y_1=1$，所以 $\vec{m}=(1,1,0)$，

设平面 A_1CM 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=-y_2+z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=x_2-y_2+\lambda z_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1-\lambda$，则 $y_2=z_2=1$，所以 $\vec{n}=(1-\lambda,1,1)$，

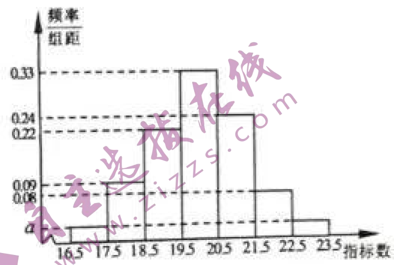
由题意可知，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|1-\lambda+1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1+(1-\lambda)^2}}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

20.（12 分）

为了提高生产效率，某企业引进一条新的生产线，现要定期对产品进行检测.每次抽取 100 件产品作为样本，检测新产品中的某项质量指标数，根据测量结果得到如下频率分布直方图.

（1）指标数不在 17.5 和 22.5 之间的产品为次等品，试估计产品为次等品的概率；

（2）技术评估可以认为，这种产品的质量指标数 X 服从正态分布 $N(\mu,1.22^2)$，其中 μ 近似为样本的平均数（同一组中的数据用该区间的中点值为代表），计算 μ 值，并计算产品指标数落在 $(17.56,22.44)$ 内的概率.



参考数据：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$.

【答案】（1）$\frac{1}{25}$；（2）0.9544

解：（1）$P=1-\frac{0.09+0.22+0.33+0.24+0.08}{1}=\frac{1}{25}$

答：产品为次等品的概率为 $\frac{1}{25}$；

（2）由（1）知：$a=\frac{1}{50}=0.02$

$\mu\approx 0.02\times17+0.09\times18+0.22\times19+0.33\times20+0.24\times21+0.08\times22+0.02\times23=20$

$P(17.56<X<22.44)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$

答：产品指标数落在(17.56,22.44)内的概率为0.9544.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=ax+\frac{2}{x}-5$.

答：产品为次等品的概率为$\frac{1}{25}$；

（2）由（1）知：$a=\frac{1}{50}=0.02$

$\mu \approx 0.02\times17+0.09\times18+0.22\times19+0.33\times20+0.24\times21+0.08\times22+0.02\times23=20$

$P(17.56<X<22.44)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$

答：产品指标数落在$(17.56,22.44)$内的概率为0.9544.

21.（12分）

已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=ax+\frac{2}{x}-5$.

（1）证明：$f(x)<\sqrt{x}$；

（2）若函数$f(x)$的图象与$g(x)$的图象有两个不同的公共点，求实数a的取值范围.

【答案】（1）证明略，见详解；（2）$a\in(0,3)$

（1）证：令$F(x)=f(x)-\sqrt{x}=\ln x-\sqrt{x}$，$x>0$

$F'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$，$x>0$

$x\in(0,4)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$递增；$x\in(4,+\infty)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$递减

因此，$F(x)\le F(4)=\ln4-2=2(\ln2-1)<0$

所以$f(x)<\sqrt{x}$；

（2）解：即方程$\ln x=ax+\frac{2}{x}-5$有两个不同的正实数解

令$h(x)=ax+\frac{2}{x}-\ln x-5$，即$h(x)$在$(0,+\infty)$有两个零点

$h'(x)=\frac{ax^2-x-2}{x^2}$，$x>0$

当$a\le0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$递增，则$h(x)$至多一个零点，不符合题意

故$a>0$

$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减；$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增

其中x_0为函数$\varphi(x)=ax^2-x-2$（$a>0$）的正根，即$x_0=\frac{1+\sqrt{8a+1}}{2a}$

$h(x)$有两个零点，则$h(x)_{\min}=h(x_0)=ax_0+\frac{2}{x_0}-\ln x_0-5=\frac{4}{x_0}-\ln x_0-4<0$

令$t(x)=\frac{4}{x}-\ln x-4$，显然$t(x)$在$(0,+\infty)$递减，$t(1)=0$

故$\frac{4}{x_0}-\ln x_0-4<0$的解为$x_0\in(1,+\infty)$

则$\varphi(1)=a-3<0$，得：$a<3$，又$a>0$，故$a\in(0,3)$

此时，$h(\frac{1}{e})=\frac{a}{e}+2e-4>0$

取x_1为方程$ax_1-\sqrt{x_1}-5=0$的正根，即$x_1=\dfrac{(\sqrt{20a+1}+1)^2}{4a^2}$

因为x_0为方程ax^2-x-2的正根，又$x_0>1$，则显然有：$x_1>\sqrt{x_1}>x_0>1$

$h(x_1)=ax_1+\dfrac{2}{x_1}-\ln x_1-5$

由（1）知:$\ln x_1<\sqrt{x_1}$，故$h(x_1)>ax_1+\dfrac{2}{x_1}-\sqrt{x_1}-5>ax_1-\sqrt{x_1}-5=0$

$h(1)h(x_0)<0$，$h(x_0)h(x_1)<0$，即$a\in(0,3)$时，$h(x)$在$(1,x_0)$和(x_0,x_1)上各有一个零点

综上，a的取值范围是：$a\in(0,3)$.

（2）要使得函数$f(x)$的图象与$g(x)$的图象有两个不同的公共点，

只需函数$G(x)=f(x)-g(x)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的零点，

$G'(x)=f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-ax^2+x+2}{x^2}$，

①当$a\leqslant 0$时，$x\in(0,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增，

所以$G(x)$不可能存在两个零点；

②当$a>0$时，方程$-ax^2+x+2=0$有两个异号的根，不妨设正根为x_0，

故$x\in(0,x_0)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增；

$x\in(x_0,+\infty)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减，

要使得$G(x)$存在两个零点，则$G(x)_{\max}=G(x_0)=\ln x_0-ax_0-\dfrac{2}{x_0}+5>0$，

又因为$-ax_0^{\ 2}+x_0+2=0$，故$a=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2}{x_0^{\ 2}}$，

则有$G(x)_{\max}=G(x_0)=\ln x_0-\dfrac{4}{x_0}+4>0$，解得$x_0>1$，

又因为$a=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2}{x_0^{\ 2}}$，故$0<a<3$.

下证：当$0<a<3$时，$G(x)=\ln x-ax-\dfrac{2}{x}+5$存在两个零点.

因为$G(e^{-5})=-ae^{-5}-\dfrac{2}{e^{-5}}<0$，$G(x_0)>G(1)=3-a>0$，

且$G(x)$在$(0,x_0)$单调递增，所以$G(x)$在$(0,x_0)$上存在唯一零点.

因为$G(x)=\ln x-ax-\dfrac{2}{x}+5<\sqrt{x}-ax-\dfrac{2}{x}+5<\sqrt{x}-ax+5$，

因为$G(x)=\ln x-ax-\frac{2}{x}+5<\sqrt{x}-ax-\frac{2}{x}+5<\sqrt{x}-ax+5$，

取$x=\frac{81}{4a^2}$，则$-a(\frac{81}{4a^2})^2+(\frac{81}{4a^2})+2<0$，所以$\frac{81}{4a^2}>x_0$，

故$G(\frac{81}{4a^2})<\frac{9}{2a}-\frac{81}{4a}+5=\frac{20a-63}{4a}<0$，

又$G(x_0)>0$，且$G(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递减，

22.（12分）

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的虚轴长为4，且经过点$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$.

（1）求双曲线C的标准方程；

（2）双曲线C的左、右顶点分别为A_1，A_2，过左顶点A_1作实轴的垂线交一条渐近线$l:y=-\frac{b}{a}x$于点T，过T作直线分别交双曲线左、右两支于P，Q两点，直线A_2P，A_2Q分别交l于M，N两点.证明：四边形A_1MA_2N为平行四边形.

【答案】（1）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$；（2）证明略，见详解

(1) 解：$\begin{cases}2b=4\\ \dfrac{25}{16a^2}-\dfrac{9}{4b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ a^2=1\end{cases}$

故双曲线C的标准方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$；

(2) 证：$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$，l：$y=-2x$，$T(-1,2)$ 显然PQ斜率存在

①当PQ斜率为0时，易得：$M(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，$N(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$，$M$，$N$关于原点对称；

②当PQ斜率不为0时，设PQ：$x=m(y-2)-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}x=my-(2m+1)\\ 4x^2-y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow(4m^2-1)y^2-(16m^2+8m)y+16m^2+16m=0$$

$$y_1+y_2=\frac{16m^2+8m}{4m^2-1},\quad y_1y_2=\frac{16m^2+16m}{4m^2-1}$$

$$\begin{cases}l:\ y=-2x\\ A_2P:\ y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)\end{cases}\Rightarrow x_M=\frac{y_1}{y_1+2x_1-2}$$

同理得：$x_N=\dfrac{y_2}{y_2+2x_2-2}$

$$\frac{1}{x_M}+\frac{1}{x_N}=\frac{y_1+2x_1-2}{y_1}+\frac{y_2+2x_2-2}{y_2}$$

$$=\frac{(2m+1)y_1-4m-4}{y_1}+\frac{(2m+1)y_2-4m-4}{y_2}$$

$$=2(2m+1)-4(m+1)(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2})$$

$$=2(2m+1)-4(m+1)\frac{2m+1}{2(m+1)}$$

$$=0$$

则$x_M+x_N=0$，又M，N在直线l：$y=-2x$上，故M，N关于原点对称；

综上，M，N关于原点对称

又A_1，A_2关于原点对称，则四边形A_1MA_2N的对角线互相平分

所以，四边形A_1MA_2N为平行四边形.

（2）联立$\begin{cases} x=-1, \\ y=-2x, \end{cases}$ 得$T(-1,2)$，由题意知过T点的直线斜率存在，

设过T点的直线方程为$y-2=k(x+1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y-2=k(x+1), \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得$(4-k^2)x^2-(2k^2+4k)x-(k^2+4k+8)=0$，

则$\Delta=(2k^2+4k)^2+4(4-k^2)(k^2+4k+8)>0$，得$k>-2$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{4k+2k^2}{4-k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{-(k^2+4k+8)}{4-k^2}$，

因为$A_2(1,0)$，所以直线A_2P的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，

联立$\begin{cases} y=-2x, \\ y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1), \end{cases}$ 解得$x_M=\dfrac{y_1}{y_1+2(x_1-1)}$，

同理可得$x_N=\dfrac{y_2}{y_2+2(x_2-1)}$，

所以$x_M+x_N=\dfrac{y_1}{y_1+2(x_1-1)}+\dfrac{y_2}{y_2+2(x_2-1)}=\dfrac{kx_1+k+2}{(k+2)x_1+k}+\dfrac{kx_2+k+2}{(k+2)x_2+k}$

$=\dfrac{2k(k+2)x_1x_2+(2k^2+4k+4)(x_1+x_2)+2k(k+2)}{[(k+2)x_1+k][(k+2)x_2+k]}$，

因为$2k(k+2)x_1x_2+(2k^2+4k+4)(x_1+x_2)+2k(k+2)$

$=\dfrac{-2k(k+2)(k^2+4k+8)+(2k^2+4k+4)(4k+2k^2)+2k(k+2)(4-k^2)}{4-k^2}$

$=\dfrac{(-2k)(k+2)[(k^2+4k+8)-(2k^2+4k+4)-(4-k^2)]}{4-k^2}=0$，

即$x_M+x_N=0$．

所以对角线MN与A_1A_2互相平分，即四边形A_1MA_2N为平行四边形．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。