惠州市 2023 届高三第三次调研考试

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	A	D	C	A	D

1. 【解析】由集合元素的互异性及子集的概念可知 $\frac{1}{x}=2$，解得实数 $x=\frac{1}{2}$．故选 A．

2. 【解析】 $a_4+a_{2019}=4$ 所以 $\{a_n\}$ 的前 2022 项和，

$S_{2022}=\frac{2022(a_1+a_{2022})}{2}=1011(a_4+a_{2019})=1011\times 4=4044$，故选 C．

3. 【解析】因为方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示双曲线，所以 $(2-m)(m+1)<0$，解得 $m<-1$ 或 $m>2$，即 $m\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，所以"$m>2$"是"方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示双曲线"的充分不必要条件，故选 B．

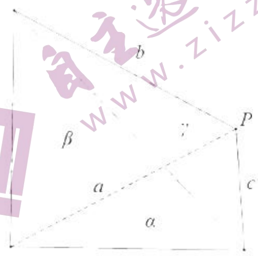
4. 【解析】A 项中，因为 $a>b>0>c$，所以 $\frac{a}{b}>0>\frac{a}{c}$，故 A 项正确；B 项中，因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减且 $a>c$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^c$，故 B 项错误；C 项中，因为 $a>0>c$，则 $\frac{1}{a}>0>\frac{1}{c}$，故 C 项错误；D 项中，若 $a=1$，$c=-2$，则 $a^2<c^2$，故 D 项错误．故选 A．

5. 【解析】 $\because a\cap b=P$，$\therefore P\in a$，$P\in b$，

$\because a=\alpha\cap\beta$，$b=\beta\cap\gamma$，$\therefore P\in\alpha$，$P\in\beta$，$P\in\gamma$，

$\because \beta\cap\gamma=c$，$\therefore P\in c$，$\therefore b\cap c=P$，$\therefore a\cap c=P$，

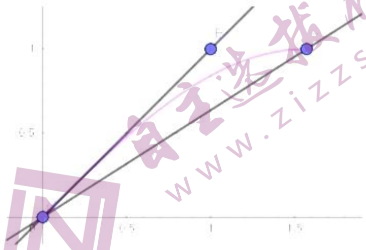
如右图所示：故 A，B，C 错误；故选 D．



6. 【解析】由函数 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 在 R 上为减函数，可知 $0<a<1$，函数 $y=\log_a(|x|-1)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x>1$ 或 $x<-1\}$，故排除 A，B，又 $y=\log_a(|x|-1)=\begin{cases}\log_a(x-1),x>1\\ \log_a(-x-1),x<-1\end{cases}$，可知 $y=\log_a(|x|-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，故排除 D．故选 C．

7. 【解析】由题意得，6 个数中任取 2 个数，共有 $C_6^2=15$ 种可能，2 个素数之和仍为素数，则可能为（2 和 3）、（2 和 5）、（2 和 11）共有 3 种可能，所求概率 $P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$．故选 A．

8．【解法一】数形结合，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，曲线 $y=\sin x$ 介于直线 PA 和 PB 之间.



即 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$，又因为 $ax<\sin x<bx$ 恒成立.

所以 $ax\le\frac{2}{\pi}x$ 且 $x\le bx$，即 $a\le\frac{2}{\pi}$ 且 $b\ge 1$

$\therefore(b-a)_{\min}=b_{\min}-a_{\max}=1-\frac{2}{\pi}$.故选 D.

【解法二】由 $ax<\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 得：$a<\frac{\sin x}{x}$；

令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

令 $g(x)=x\cos x-\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=-x\sin x<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$\therefore g(x)<g(0)=0$，则 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$\therefore f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$，$\therefore a\le\frac{2}{\pi}$；

令 $h(x)=\sin x-bx\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $h'(x)=\cos x-b$，$\because 0<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\cos x<1$；

当 $b\le 0$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增 $\therefore h(x)>h(0)=0$，不合题意；

当 $b\ge 1$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调减，$\therefore h(x)<h(0)=0$，满足题意；

当 $0<b<1$ 时，$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，又 $h'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，则 $h(x)>h(0)=0$，不合题意；

综上所述 $(b-a)_{\min}=b_{\min}-a_{\max}=1-\frac{2}{\pi}$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题满分 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ABC	AC

9．【解析】$z=\dfrac{-1+i}{i}=\dfrac{i^2+i}{i}=1+i$，$\therefore z$ 的虚部为 1，$|z|=\sqrt{2}$，$z^2=2\mathrm{i}$ 为纯虚数，$\bar{z}=1-\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第四象限，故选 AC．

10．【解析】对于 A：样本容量 $n=\dfrac{16}{0.016\times10}=100$，故 A 不正确；

对于 B：因为 $(0.016+x+0.040+0.010+0.004)\times10=1$，解得 $x=0.030$，故 B 正确；

对于 C：学生成绩平均分为 $0.16\times55+0.30\times65+0.40\times75+0.10\times85+0.04\times95=70.6$，C 正确；

对于 D：因为 $10\times(0.004+0.010)+(80-78)\times0.040=0.22>0.20$，即按照成绩由高到低前 20% 的学生中不含 78 分的学生，所以成绩为 78 分的学生不能得到此称号，故 D 不正确，

故选 BC．

11．【解析】对于 A：$f'(x)=3^x\ln3-2^x\ln2=2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ln3-\ln2\right]$

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $2^x>1$，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>1$，因此 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ln3>\ln3>\ln2$，

故 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确；

对于 B：令 $a=\sqrt{6}$，则 $y=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x$，令 $g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x$，定义域为 R，关于原点对称，且 $g(-x)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-x}-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^{-x}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^x-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^x=-g(x)$，故 $g(x)$ 为奇函数，B 正确

对于 C：$x>0$ 时，$f(x)=2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-1\right]>0$；$x=0$ 时，$f(x)=0$；

$x<0$ 时，$f(x)>-2^x>-1$；C 正确；

对于 D：$x=0$ 时，$g(x)=0$，$x>0$ 时，$g(x)>3^x-2^x=2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-1\right]>0$，

$x<0$ 时，$g(x)<3^x-2^x=2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-1\right]<0$，所以 $g(x)$ 只有 1 个零点，D 错误；故选：ABC

12．【解析】当两切线分别与两坐标轴垂直时，两切线的方程分别为 $x=\pm a$、$y=\pm b$，

所以，点 $(\pm a,\pm b)$ 在蒙日圆上，故蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$，

因为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $a^2=2b^2$．

对于 A 选项，蒙日圆圆心到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$，故 l 与蒙日圆相切，A 对；

对于 B 选项，C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2=\dfrac{3}{2}a^2$，B 错；

对于 C 选项，由椭圆的定义可得 $|AF_1|+|AF_2|=2a=2\sqrt{2}b$，

则 $|AF_2|=2\sqrt{2}b-|AF_1|$，所以 $d-|AF_2|=d+|AF_1|-2\sqrt{2}b$，

因为 $c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=b$，直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y-3b=0$，点 $F_1(-b,0)$ 到直线 l 的距离为

$d'=\dfrac{4b}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b$，所以 $d-|AF_2|=d+|AF_1|-2\sqrt{2}b\geq d'-2\sqrt{2}b=\dfrac{(4\sqrt{3}-6\sqrt{2})b}{3}$，当且仅当

$AF_1\perp l$ 时，等号成立，C 对；

对于 D 选项，若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切，

则矩形 $MNGH$ 的四个顶点都在蒙日圆上，所以 $|MN|^2+|MH|^2=(2\sqrt{3}b)^2=12b^2$，

所以矩形 $MNGH$ 的面积为 $S=|MN|\cdot|MH|\leq\dfrac{|MN|^2+|MH|^2}{2}=6b^2$，D 错.故选：AC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分，其中16题第一个空2分，第二空3分。

13．2；　　14．1；　　15．$6\sqrt{10}$；　　16．$\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$（**2分**），1（**3分**）

13．【解析】因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $-2\lambda+4=0$，解得 $\lambda=2$.

14．【解法一】由三角函数的定义可知 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

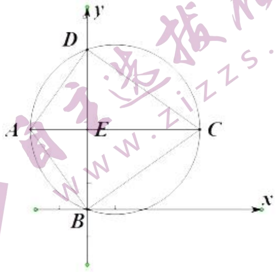
所以 $\cos^2\theta+\sin2\theta=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=(\dfrac{\sqrt{5}}{5})^2+2\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=1$

【解法二】因为角 θ 的终边经过点 $(1,2)$，所以 $\tan\theta=\dfrac{2}{1}=2$，

所以 $\cos^2\theta+\sin2\theta=\dfrac{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{1+2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{1+2\times2}{2^2+1}=1$.

15．【解析】圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$，

则圆心$(1,3)$半径$r=\sqrt{10}$，由题意知最长弦为过E点的直径，最短弦为过E点和这条直径垂直的弦，即$AC\perp BD$，且$|AC|=2\sqrt{10}$，圆心和E点之间的距离为1，故$|BD|=2\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-1^2}=6$，所以四边形$ABCD$的面积为$S=\frac{1}{2}|AC||BD|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times6=6\sqrt{10}$.故答案为：$6\sqrt{10}$



16.【解析】（1）由$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，

则$K=\frac{|f''(1)|}{\left(1+\left[f'(1)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，

（2）由$g'(x)=\cos x$，$g''(x)=-\sin x$，则$K=\frac{|\sin x|}{\left(1+\cos^2x\right)^{\frac{3}{2}}}$，

$K^2=\frac{\sin^2x}{\left(1+\cos^2x\right)^3}=\frac{\sin^2x}{\left(2-\sin^2x\right)^3}$，令$t=2-\sin^2x$，则$t\in[1,2]$，

故$K^2=\frac{2-t}{t^3}$，设$p(t)=\frac{2-t}{t^3}$，则$p'(t)=\frac{-t^3-3t^2(2-t)}{t^6}=\frac{2t-6}{t^4}$，

在$t\in[1,2]$时$p'(t)<0$，$p(t)$递减，所以$p(t)_{\max}=p(1)=1$，K^2最大值为1.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{25}$，1

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分，其中第一小问4分，第二小问6分）

【解析】（1）因为$a_{n+1}=2a_n-1$，

所以$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，且$a_n\geq2$ ……………………… 1分

得$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$ ……………………………………… 2分

又$a_1-1=1$ ……………………………………………… 3分

所以数列$\{a_n-1\}$是以1为首项，2为公比的等比数列 ………4分**【注：无首项和公比的说明，本得分点不得分】**

（2）由（1）可知 $a_n-1=2^{n-1}$，$n\in N^*$ ………………………………………1分

所以$b_n=a_n+n=2^{n-1}+n+1$ ……………………………………………2 分

又由题知 $T_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$

所以$T_n=(2^0+1+1)+(2^1+2+1)+(2^2+3+1)+\ldots+(2^{n-1}+n+1)$

$=(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+(1+2+3+\ldots+n)+n$ …………… 3 分

$=\dfrac{1-2^{n-1}\cdot 2}{1-2}+\dfrac{n(n+1)}{2}+n$ …………… 5 分【注：等差等比求和公式各 1 分】

$=2^n+\dfrac{n^2+3n}{2}-1$

$\therefore T_n=2^n+\dfrac{n^2+3n}{2}-1$ ……………………………………………………… 6 分

18．（本小题满分 12 分，其中第一小问 6 分，第二小问 6 分）

【解析】（1）选②

因为$\dfrac{\sin A-\sin C}{b}=\dfrac{\sin B+\sin C}{a+c}$，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

所以$\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{b+c}{a+c}$ ………………………………………………………………1 分

即$b^2+c^2-a^2=-bc$， ……………………………………………………2 分

由余弦定理$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ …………………………3 分

$=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$ ………………………………………4 分

因为$A\in(0,\pi)$，……………………………………………………5 分【注：无此步骤，本得分点不得分】

所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$ ………………………………………………………………………6 分

选③

因为$\sqrt{3}b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$且$A+B+C=\pi$

所以$\sqrt{3}\sin B\sin\dfrac{\pi-A}{2}=\sin A\sin B$， ………………………………1 分

即$\sqrt{3}\sin B\cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin B$ ………………………………3 分

而A、$B\in(0,\pi)$，$\therefore\sin B\neq 0,\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$， ………………4 分【注：无此步骤，本得分点不得分】

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………5 分

因为 $\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}$，即 $A=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………6 分

选①

因为 $a\cos B=c+\frac{1}{2}b$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

所以 $\sin A\cos B=\sin C+\frac{1}{2}\sin B$， ……………………………1 分

即 $\sin A\cos B=\sin(A+B)+\frac{1}{2}\sin B$， ……………………………2 分

所以 $\cos A\sin B=-\frac{1}{2}\sin B$ ， ……………………………3 分

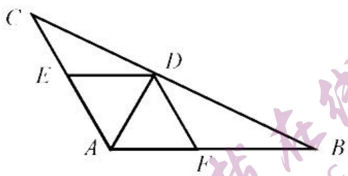
而 $B\in(0,\pi)$，$\therefore\sin B\neq 0$， ……………………………4 分

故 $\cos A=-\frac{1}{2}$ ， ……………………………5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………6 分

【备注：从 3 个条件的思维量及计算步骤数综合分析，从易到难排序为 ②<③<①】

（2）【解法一】如图，过 D 分别作 $DE//AB$，$DF//AC$



由题意可知 ΔADE 和 ΔADF 都是边长为 1 的正三角形…………1 分

由 $DE//AB$ 得 $\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{CB}$ ……………………………2 分

所以 $\frac{1}{c}=\frac{CD}{CB}$，即 $\frac{CB}{c}=CD$

同理，$\frac{DF}{AC}=\frac{BD}{BC}$，所以 $\frac{CB}{b}=BD$

由 $CB=CD+DB$ 得 $CB=\frac{CB}{c}+\frac{CB}{b}$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ ………………3 分

因此 $2b+c=(2b+c)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+\frac{c}{b}+\frac{2b}{c}$ ……………………………4 分

$$\geq 3+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{2b}{c}}=3+2\sqrt{2}$$，……………………………5 分

当且仅当 $c=\sqrt{2}b=\sqrt{2}+1$ 时取等号 ……………6 分 **【注：无此步骤，本得分点不得分】**

所以 $2b+c$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

【解法二】由题意可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$， ……………………………1 分

由角平分线性质和三角形面积公式得，

$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}b\times1\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\times1\times\sin\frac{\pi}{3}$ …………2 分 **【注：面积公式正确可得 1 分】**

化简得 $bc=b+c$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$， ……………………………………………3 分

因此 $2b+c=(2b+c)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+\frac{c}{b}+\frac{2b}{c}$ ……………………………………4 分

$\geq 3+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{2b}{c}}=3+2\sqrt{2}$， ……………………………………………5 分

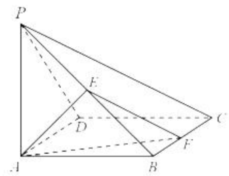
当且仅当 $c=\sqrt{2}b=\sqrt{2}+1$ 时取等号 ……………6 分【注：无此步骤，本得分点不得分】

所以 $2b+c$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

19. （本小题满分 12 分，其中第一小问 6 分，第二小问 6 分）

【解析】（1）【解法一】因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BC$. ……………………………………………1 分



因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp BC$，

又因为 $PA\cap AB=A$， $PA\subset$ 平面 PAB， $AB\subset$ 平面 PAB【见注 1】

所以 $BC\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………… 2 分

因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp BC$. ……………………………3 分

因为 $PA=AB$， E 为线段 PB 的中点，

所以 $AE\perp PB$， ……………………………………………4 分

又因为 $PB\cap BC=B$， $PB\subset$ 平面 PBC， $BC\subset$ 平面 PBC【见注 1】

所以 $AE\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………5 分

又因为 $AE\subset$ 平面 AEF，

所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………6 分

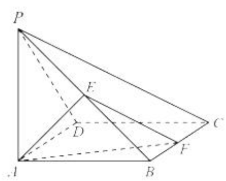
【注 1：证明线面垂直过程中，无写出三个辅助条件，扣 1 分】

【解法二】因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $PA\subset$ 平面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$ ……………………………………………1 分

又平面 $PAB\cap$ 底面 $ABCD=AB$， $BC\perp AB$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，【见注 1】

所以 $BC\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………2 分



因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp BC$. ……………………………3 分

因为 $PA=AB$， E 为线段 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$. ………………4 分

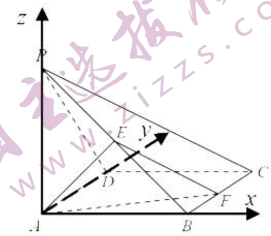
因为 $PB\cap BC=B$， $PB\subset$ 平面 PBC， $BC\subset$ 平面 PBC【见注 1】

所以 $AE\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………………………5 分

又因为 $AE\subset$ 平面 AEF，

所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC ……………………………………………6 分

【解法三】因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，……1 分



则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),P(0,0,2),E(1,0,1)$,

设 $BF=t(t\in[0,2])$，则 $F(2,t,0)$

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,0,1),\overrightarrow{AF}=(2,t,0),\overrightarrow{PB}=(2,0,-2),\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$……2 分

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 AEF 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_1+z_1=0,\\ 2x_1+ty_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=2$, 则 $x_1=-t,z_1=t$,则 $\vec{n}=(-t,2,t)$ …3 分

设 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PBC 的法向量，

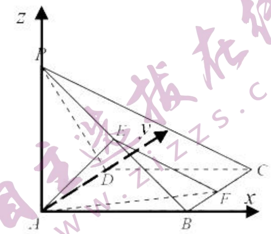
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x_2-2z_2=0,\\ 2y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$, 则 $y_2=0,z_2=1$,则 $\vec{m}=(1,0,1)$ …4 分

因为 $\vec{n}\cdot\vec{m}=-t+0+t=0$，所以 $\vec{n}\perp\vec{m}$ ……………………………………………5 分

所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC ……………………………………………………6 分

（2）【解法一】（基于（1）解法一、二）

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，……1 分



则 $A(0,0,0),B(2,0,0),P(0,0,2),E(1,0,1)$,

易知 $\vec{u}=(0,1,0)$ 是平面 PAB 的法向量 ……………2 分

设 $BF=t(t\in[0,2])$，则 $F(2,t,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(1,0,1),\overrightarrow{AF}=(2,t,0)$,

所以 $|\cos<\overrightarrow{AF},\vec{u}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{u}|}{|\overrightarrow{AF}||\vec{u}|}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

即 $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $t=1$，所以 $\overrightarrow{AF}=(2,1,0)$,……………………………………3 分

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 AEF 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$

所以平面 AEF 的法向量 $\vec{n}=(-1,2,1)$，………………………………………………4 分

又因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$

所以点 P 到平面 AEF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，……………………5 分

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以点 P 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………6 分

【解法二】（基于（1）解法一、二）

由（1）可知，$\angle BAF$ 是直线 AF 与平面 PAB 所成的角，

所以 $\cos\angle BAF=\frac{AB}{AF}=\frac{AB}{\sqrt{AB^2+BF^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………………1 分

解得 $BF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC$，故 F 是 BC 的中点. ……………………2 分

所以 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$，$AE=\frac{1}{2}PB=\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{3}$

ΔAEF 的面积为 $S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}AE\bullet EF=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ……………………………3 分

因为 $PA=AB=2$，ΔPAE 的面积为 $S_{\Delta PAE}=\frac{1}{2}S_{\Delta PAB}=\frac{1}{4}PA\bullet AB=1$……4 分

设点 P 到平面 AEF 的距离为 h，则有

$V_{P-AEF}=\frac{1}{3}S_{\Delta AEF}\bullet h=\frac{\sqrt{6}}{6}h=V_{F-PAE}=\frac{1}{3}S_{\Delta PAE}\bullet BF=\frac{1}{3}$ ……………………5 分

解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$

所以点 P 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………6 分

【解法三】（基于（1）解法三）

易知 $\vec{u}=(0,1,0)$ 是平面 PAB 的法向量 ……………………………………1 分

所以 $|\cos<\overrightarrow{AF},\vec{u}>|=\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{u}|}{|\overrightarrow{AF}||\vec{u}|}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$，

即 $\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $t=1$ ……………………………………2 分

所以 $\vec{n}=(-1,2,1)$，……………………………………………………4 分

又因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$

所以点 P 到平面 AEF 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$， …………………………5 分

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以点 P 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………6 分

20．（本小题满分 12 分，其中第一小问 3 分，第二小问 5 分，第三小问 4 分）

【解析】（1）样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\overline{x}=\frac{0.6}{10}=0.06$ ……………1 分

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\frac{3.9}{10}=0.39$ ……………2 分

据此可估计：该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 0.06m^2，

平均一棵的材积量为 0.39m^3 ……………………3 分【注：最终结果无单位扣 1 分】

（2）$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2\right)}}$ ……… 1 分

$$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}$$ …………………… 2 分

$$=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}$$ ……………………………………………………3 分

$$\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$$ ……………………………………………………4 分

则 $r\approx0.97$ ……………………………………………… 5 分

【备注：运用参考公式计算过程可通过下面的列表进行分步】：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合计	平均值
x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6	0.06
y_i	0.25	0.4	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.4	3.9	0.39
$x_i-\overline{x}$	−0.02	0	−0.02	0.02	0.02	−0.01	−0.01	0.01	0.01	0		
$y_i-\overline{y}$	−0.14	0.01	−0.17	0.15	0.12	−0.05	−0.03	0.07	0.03	0.01		
$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	0.0028	0	0.0034	0.003	0.0024	0.0005	0.0003	0.0007	0.0003	0	0.0134	分子
$(x_i-\overline{x})^2$	0.0004	0	0.0004	0.0004	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0	0.002	
$(y_i-\overline{y})^2$	0.0196	0.0001	0.0289	0.0225	0.0144	0.0025	0.0009	0.0049	0.0009	0.0001	0.0948	
											0.0001896	分母的平方

【备注：运用变形公式计算过程可通过下面的列表进行分步】：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合计	平均值
x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6	0.06
y_i	0.25	0.4	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.4	3.9	0.39
$x_i \cdot y_i$	0.01	0.024	0.0088	0.0432	0.0408	0.017	0.018	0.0322	0.0294	0.024	0.2474	部分分子
x_i^2	0.0016	0.0036	0.0016	0.0064	0.0064	0.0025	0.0025	0.0049	0.0049	0.0036	0.038	部分分母
y_i^2	0.0625	0.16	0.0484	0.2916	0.2601	0.1156	0.1296	0.2116	0.1764	0.16	1.6158	部分分母

（3）设该林区这种树木的总材积量的估计值为 Y m^3 ………………………… 1 分

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，可得 $\dfrac{0.06}{0.39}=\dfrac{186}{Y}$ …… 2 分

解得 $Y=1209$ ………………………………………………………………… 3 分

则估计该林区这种树木的总材积量为 $1209m^3$ ………………………… 4 分

21．（本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$ ……………………………………1 分

当 $a=1$ 时，$f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$ …………………………………………………2 分

令 $f'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；…………3 分

令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\dfrac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递减. …………4 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

（2）【解法一】$f(x)\ge(a+2)x-xe^x$ 恒成立

等价于 $xe^x-a\ln(xe^x)\ge0$ 恒成立，…………………………………………………… 1 分

令 $t=g(x)=xe^x(x>0)$,

因为 $g'(x)=(x+1)e^x>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，即 $t>0$, ……………………………… 2 分

所以 $f(x)\ge(a+2)x-xe^x$ 恒成立，等价于 $t-a\ln t\ge0$ 恒成立

令 $h(t)=t-a\ln t(t>0)$, 问题等价于 $h(t)\ge0$ 恒成立………………………………… 3 分

①若 $a=0$ 时，$h(t)=t>0$ 恒成立，满足题意；………………………………… 4 分

②若 $a<0$ 时，则 $0<e^{\frac{1}{a}}<1$，所以 $h(e^{\frac{1}{a}})=e^{\frac{1}{a}}-a\ln e^{\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，

不满足题意；……………………………………………………………… 5 分

③若 $a>0$ 时，因为 $h'(t)=1-\frac{a}{t}$，令 $h'(t)=0$，得 $t=a$，

$t\in(0,a)$，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，$t\in(a,+\infty)$，$h'(t)>0$. $h(t)$ 单调递增，

所以 $h(t)$ 在 $t=a$ 处取得最小值 $h(a)=a(1-\ln a)$，………………………6 分

要使得 $h(t)\geq 0$, 恒成立，只需 $h(a)=a(1-\ln a)\geq 0$，

解得 $0<a\leq \mathrm{e}$ ……………………………………………………………… 7 分

综上：$a\in[0,\mathrm{e}]$ ……………………………………………………………… 8 分

【解法二】 $f(x)\geq(a+2)x-x\mathrm{e}^x$ 恒成立，等价于 $x\mathrm{e}^x-a(x+\ln x)\geq 0$，………… 1 分

令 $h(x)=x\mathrm{e}^x-a(x+\ln x)(x>0)$

$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-a\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}\right)$……………………………………………2 分

①若 $a=0$ 时，$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$h(0)=0$，即 $h(x)>0$，满足 $x\mathrm{e}^x-a(x+\ln x)\geq 0$，………………………… 3 分

②若 $a<0$ 时，则 $-a>0,h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 x 趋近于 0^+ 时，$h(x)$ 趋近于负无穷，不成立，故 $a<0$ 不满足题意．………4 分

③若 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$, $\therefore a=x\mathrm{e}^x$，

令 $k(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$，因为 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且当 $x\to+\infty$ 时，$k(x)\to+\infty$，当 $x\to 0$ 时，$k(x)\to-\infty$，

所以 $\exists x_0\in(0,+\infty),h'(x_0)=0,\ a=x_0\mathrm{e}^{x_0}$，…………………………………… 5 分

$x\in(0,x_0),h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$x\in(x_0,+\infty),h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

只需 $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)\geq 0$ 即可，

$\therefore 1-x_0-\ln x_0\geq 0$，$\therefore x_0+\ln x_0\leq 1$，………………………… 6 分

令 $m(x)=x+\ln x(x>0),m'(x)=1+\frac{1}{x}>0,\therefore m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$m(1)=1,\therefore x_0\in(0,1]$ 时，$x_0+\ln x_0\leq 1,y=x\mathrm{e}^x$，$y'=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，

所以 $y=xe^x$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，$\therefore xe^x\in(0,e]$，

即 $a=x_0e^{x_0}\in(0,e]$，…………………………………………………………………… 7 分

综上：$a\in[0,e]$ ……………………………… 8 分

22. （本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）因为椭圆 C 过点 $A(-2,0)$，所以 $a=2$， ……………………………1 分

因为 $|AF|=3$，所以 $a+c=3$，得 $c=1$. ……………………2 分

故 $b^2=a^2-c^2=3$， ………………………………3 分

从而椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………4 分

（2）【解法一】设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则直线 AP 的斜率为 $\dfrac{y_0}{x_0+2}$ ………1 分

因为 $OQ\,//\,AP$，所以直线 OQ 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}x$，

令 $x=4$ 可得 $y=\dfrac{4y_0}{x_0+2}$，所以 $Q\left(4,\dfrac{4y_0}{x_0+2}\right)$， ……………………2 分

又 M 是 AP 的中点，所以 $M\left(\dfrac{x_0-2}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$， ……………………3 分

从而 $\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{x_0-2}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$，$\overrightarrow{FQ}=\left(3,\dfrac{4y_0}{x_0+2}\right)$

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{FQ}=\dfrac{3(x_0-2)}{2}+\dfrac{2y_0^2}{x_0+2}=\dfrac{3(x_0^2-4)+4y_0^2}{2(x_0+2)}$ ① ………………5 分

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，故 $3x_0^2=12-4y_0^2$， ……………6 分

代入式①可得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，从而 $OM\perp FQ$， ……………………7 分

所以，点 T 始终在以 OF 为直径的圆上，且该圆方程为 $(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ ……8 分

【解法二】由直线 AP 不与 y 轴垂直，故可设其方程为 $x=my-2\ (m\neq0)$ ……1 分

联立 $\begin{cases}x=my-2\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x 整理得：$(3m^2+4)y^2-12my=0$，

解得：$y=0$或$\dfrac{12m}{3m^2+4}$，所以$y_p=\dfrac{12m}{3m^2+4}$，……………………2 分

从而$x_p=my_p-2=\dfrac{6m^2-8}{3m^2+4}$，故$P\left(\dfrac{6m^2-8}{3m^2+4},\dfrac{12m}{3m^2+4}\right)$ ……………………3 分

因为M是线段AP的中点，所以$M\left(-\dfrac{8}{3m^2+4},\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)$ ……………………4 分

因为$OQ // AP$，所以直线OQ的方程为$x+my=0$，

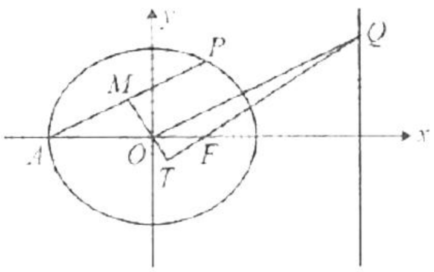
联立$\begin{cases}x+my=0\\x=4\end{cases}$解得：$y=-\dfrac{4}{m}$，所以$Q\left(4,-\dfrac{4}{m}\right)$，……………………5 分

故$\overrightarrow{OM}\left(-\dfrac{8}{3m^2+4},\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)$，$\overrightarrow{FQ}\left(3,-\dfrac{4}{m}\right)$

从而$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{FQ}=-\dfrac{8}{3m^2+4}\times3+\dfrac{6m}{3m^2+4}\times\left(-\dfrac{4}{m}\right)=0$，……………………6 分

从而$OM\perp FQ$，……………………7 分

所以，点T始终在以OF为直径的圆上，且该圆方程为$(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ ……8 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。