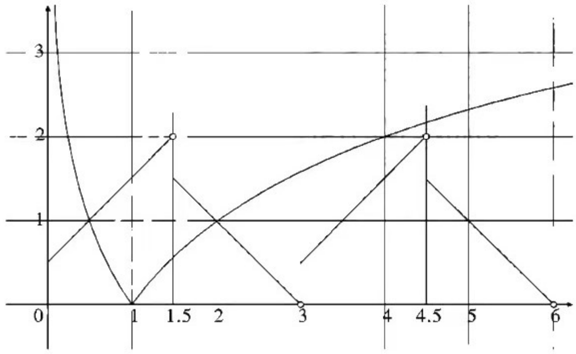
重庆市高2023届高三第六次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题:本题共8小题.每小题5分,共40分.

1－4 CAAD　　5－8 DCBD

6. C　根据题意当$x\in\left[\frac{3}{2},3\right)$时$f(x)=3-x$,画出函数示意图,可得不等式解集为$x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$



7. B　由题可得:$4=AB^2+\left(\frac{1}{2}CD\right)^2=AB^2+OB^2$,设$B(x,y)$,则化简得:$x^2+y^2+x+y-1=0$为点$B$的轨迹方程.

8. D　由题$\overrightarrow{A_{3k-2}A_{3k-1}}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_{3k-1}A_{3k}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_{3k}A_{3k+1}}=(1,0)$

$\therefore a_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2,\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)=(0,b_1)$,

又$a_1=1\therefore a_2=-1,b_1=\sqrt{3}$

$\therefore a_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a_3(1,0)=\left(-\frac{1}{2}a_2+a_3,-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)=(0,b_2)\therefore a_3=-\frac{1}{2},b_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,同理

$a_4=-1,b_3=-\frac{\sqrt{3}}{2};a_5=1,b_4=-\sqrt{3};a_6=\frac{1}{2},b_5=-\frac{\sqrt{3}}{2};a_7=1,b_6=\frac{\sqrt{3}}{2};a_8=-1,b_7=\sqrt{3};a_9=-\frac{1}{2}$,

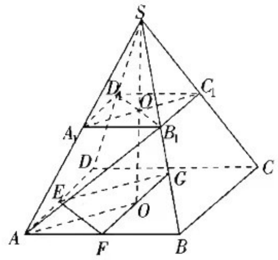
$b_8=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots$即数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均是周期为6的数列,而$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$,$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=0$,

$\therefore S_{60}+2T_{60}=0$

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.全部选对得5分,部分选对得2分,有选错得0分.

9－12　ABD　BC　ABD　ACD

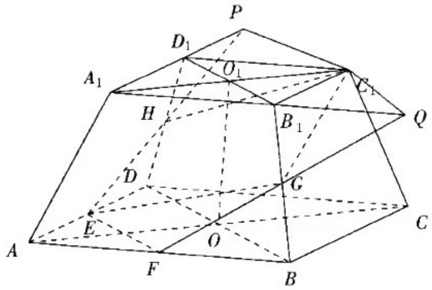
11. ABD 将正四棱台补形为正四棱锥 $S-ABCD$，由 $AB=2$，$A_1B_1=1$，可得 $A_1B_1C_1D_1$ 为其中截面. 设 O，O_1 分别为 $ABCD$，$A_1B_1C_1D_1$ 的中心，易得 $AO=\sqrt{2}$，$SO\perp$ 底面 $ABCD$，故 $\angle SAO$ 为侧棱 AA_1 与底面所成角，故 $\angle SAO=\dfrac{\pi}{3}$，可得 $SA=2\sqrt{2}$，$AA_1=\sqrt{2}$，$SO=\sqrt{6}$，$O_1O=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$AB_1=2$.



对于 A，$V=\dfrac{1}{3}\left(S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{ABCD}S_{A_1B_1C_1D_1}}\right)\times h=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$，正确

对于 B，由于 $B_1D_1/\!/EF$，得 $B_1D_1/\!/$平面 EFG，故三棱锥 $E-FGM$ 的体积为定值，正确

对于 C，取 DD_1 中点 H，连接 EH 并延长交 A_1D_1 于 P，连接 FG 并延长交 A_1B_1 于 Q，易得 P,C_1,Q 三点共线，故五边形 $EFCC_1H$ 为平面 EFG 截正棱台所得的截面. 错误



对于 D，由 $D_1E/\!/SA$，可得 $\angle SAB_1$ 为异面直线 AB_1 与 ED_1 所成角或补角. 在 $\triangle SAB_1$ 中利用余弦定理可得 $\cos\angle SAB_1=\dfrac{8+4-2}{8\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$，正确. 故选 ABD

12. ACD A. $f(x)$ 的定义域为 $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$，解得 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，A 正确

B. 显然错误

C. 设 $g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\ln\left(\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$，则

$g(-x)=\ln\left(\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\ln\left(\cos\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\ln\left(\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\ln\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=g(x)$，

C 正确

D. $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}\ln(\sin x)+\dfrac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x)=\dfrac{\cos^2x\ln(\cos x)-\sin^2x\ln(\sin x)}{\sin x\cos x}$，

$=\dfrac{\cos^2x\ln(\cos^2x)-\sin^2x\ln(\sin^2x)}{2\sin x\cos x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

令 $g(t)=t\ln t-(1-t)\ln(1-t)$，$t\in(0,1)$，$g'(t)=1+\ln t+1+\ln(1-t)$，由 $g''(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{1-2t}{t(1-t)}$

当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$g''(t)>0$，即当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$g'(t)$ 单调递增，当 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$g''(t)<0$

$\therefore g'(t)$ 在 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 单调递减，且 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-2\ln 2>0$，且 $t\to1^-$ 时 $g'(t)\to-\infty$，$t\to0^+$ 时 $g'(t)\to-\infty$，

故存在 $t_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$t_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $g'(t)=0$，即有 $g(t)$ 在 $(0,t_1)$ 单调递减，在 (t_1,t_2) 单调递增，在 $(t_2,1)$ 单调递减，

注意到 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，且 $t\to1^-$ 时 $g(t)\to0$，$t\to0^+$ 时 $g(t)\to0$，从而对于 $t=\cos^2x$，易知当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $g(t)<0$，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时 $g(t)>0$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增，$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的唯一极大值点，

故 D正确. 故选 ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{70}{81}$　　14. $(4,3)$（答案不唯一）　　15. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　　16. $y^2=4x$

15. 由 $AC=2\sqrt{3}$，$AB=2$，$BC=2$ 得 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore 2r=\frac{AC}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$，$r=2$（$r$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径）

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC=\sqrt{3}$，$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=\frac{1}{3}\sqrt{3}h=\frac{2\sqrt{3}}{3}\therefore h=2$，

即 P 到平面 ABC 的距离为 2

$\therefore$ 外接球球心 O（PC 的中点）到平面 ABC 的距离为 1，

$\therefore$ 外接球半径 $R^2=r^2+1=5\therefore R=\sqrt{5}$

$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$

16. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$ 可得：$(2-x_1,1-y_1)=\lambda(x_3-2,y_3-1)$，

据此可得：$\begin{cases}x_1+\lambda x_3=2+2\lambda\\y_1+\lambda y_3=1+\lambda\end{cases}$，同理可得：$\begin{cases}x_2+\lambda x_4=2+2\lambda\\y_2+\lambda y_4=1+\lambda\end{cases}$，

则：$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda(x_3+x_4)=4(1+\lambda)\\y_1+y_2+\lambda(y_3+y_4)=2(1+\lambda)\end{cases}$，（*）

将 A,B 两点代入抛物线方程做差可得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(y_1+y_2)=2p$，即 $y_1+y_2=p$

同理可得，$y_3+y_4=p$，代入（*），可得 $p=2$，此时抛物线方程为 $y^2=4x$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由题知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{196+230+302+390+482}{5}=320$ ………………… 2 分

$\therefore\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-124)+(-1)\times(-90)+0+70+2\times162=732$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$

$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{732}{\sqrt{10}\sqrt{54944}}=\frac{732}{741.2}\approx0.988$ ……………………………… 5 分

因为 $r>0.75$，所以认为相关变量 x,y 有较强的相关性 ……………………………………………… 6 分

(2)由(1)得 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{732}{10}=73.2$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=320-73.2\times3=100.4$ ………… 7 分

$\therefore$ 回归方程为 $\hat{y}=73.2x+100.4$， ………………………………………… 9 分

当 $x=6$ 时 $\hat{y}=539.6$，即 2023 年该公司投入研发人数约 540 人 ………………………… 10 分

18. 解：(1)由 $3T_n=a_{n+1}-a_1$ 当 $n=1$ 时，$3T_1=a_2-a_1\therefore a_2-a_1=3b_1=6$，且 $a_1=4$，

故等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=\dfrac{5}{2}\therefore S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{4\left(1-\left(\frac{5}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{5}{2}}=\dfrac{8}{3}\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^n-1\right)$ ……………… 4 分

(2)当 $n\geqslant2$ 时，由 $3T_n=a_{n+1}-a_1\Rightarrow3T_{n-1}=a_n-a_1\therefore 3b_n=a_{n+1}-a_n$ ①

由 $b_{n+1}=3S_n+b_1\Rightarrow b_n=3S_{n-1}+b_1\therefore 3a_n=b_{n+1}-b_n$ ② ………………………………… 6 分

将①+②得：$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)(n\geqslant2)$

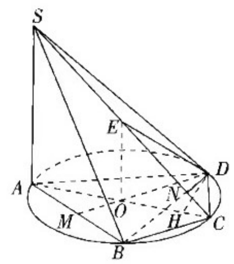
当 $n=1$ 时有：$3b_1=a_2-a_1$，$3a_1=b_2-b_1\therefore a_2+b_2=4(a_1+b_1)$ 且 $a_1+b_1=6\neq0$

$\therefore\{a_n+b_n\}$为等比数列 ……………………………………………… 9 分

同理，将①-②得：$a_{n+1}-b_{n+1}=-2(a_n-b_n)(n\geqslant2)$

当 $n=1$ 时有：$3b_1=a_2-a_1$，$3a_1=b_2-b_1\therefore a_2-b_2=-2(a_1-b_1)$ 且 $a_1-b_1=2\neq0$

$\therefore\{a_n-b_n\}$为等比数列. ……………………………………………… 12 分



19. 解：(1)连接 BD，取 AB 中点 M，连接 DM 交 AC 于 O

因为 $\angle DAC=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}\therefore\Delta ABD$ 为等边三角形，$\therefore DM\perp AB$

由 $SA\perp$平面 $ABCD$ 得 $SA\perp AB$，又易知 O 为 AC 中点，$\therefore SA/\!/EO\therefore EO\perp AB$

从而 $AB\perp$平面 $EOD\therefore DE\perp AB$ ………………………………………………… 4 分

(2)作 $DH\perp AC$ 于 H，作 $HN\perp SC$ 于 N，连接 DN，则可证得 $DN\perp SC$，

故$\angle DNH$为二面角 $D-SC-A$ 的平面角，……………………………………………… 6 分

由题意知 $DO=CO=DC=1\therefore DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\therefore\tan\angle DNH=\dfrac{DH}{NH}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{NH}=\sqrt{6}\therefore NH=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ 在 RtΔSAC 和 Rt$\triangle NHC$ 中，易得$\dfrac{NH}{HC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\therefore\angle SCA=45^\circ\therefore SA=AC=2$ ……………………… 8 分

又由 $AD=\sqrt{3}$ 结合 RtΔSDC 得：$SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{7}\therefore S_{\Delta SCD}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

由于点 B 在半圆弧 AC 上运动，当 B 位于线段 CD 中垂线上时，$S_{\Delta BCD\max}=\dfrac{1}{2}\cdot CD\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………………………………… 10 分

根据 $V_{B-SCD}=V_{S-BCD}\Rightarrow d_{B-SCD}=\dfrac{3V_{S-BCD}}{S_{\Delta SCD}}\leqslant\dfrac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\times 2}{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}{7}$,

即点 B 到平面 SCD 距离的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}{7}$ ………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由已知化简得 $f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos\omega x+\dfrac{3}{2}\sin\omega x=3\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, ……………………… 2 分

$\therefore g(x)=3\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)$,由 $g(0)=0$ 得 $\dfrac{\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{3}=k\pi\therefore\omega=3k-1,k\in\mathbf{Z}$,

又 $0<\omega<4,\therefore\omega=2\therefore f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ………………………………………… 5 分

(2)易得 $BC=2f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=6$, ………………………………………………………… 6 分

由 $\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ACM}}=\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{AB\sin\angle BAM}{AC\sin\angle CAM}$ ①

$\dfrac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ACN}}=\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AB\sin\angle BAN}{AC\sin\angle CAN}$ ② ………………………………………………… 8 分

又 $\angle BAM=\angle CAN\therefore\angle BAN=\angle CAM$

将①×②式并结合 $\dfrac{BM\cdot BN}{CM\cdot CN}=\dfrac{1}{2}$ 可得:$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{1}{2}$ ………………………………… 10 分

以 BC 所在直线为 x 轴,以 BC 中垂线为 y 轴建立直角坐标系,则 $C(-3,0),B(3,0)$

设 $A(x,y)$,则由 $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{1}{2}$ 可得:点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2-18x+9=0$,即 $(x-9)^2+y^2=72$

$\therefore$ 当 $|y_A|=6\sqrt{2}$ 时,$S_{\Delta ABC}$ 取到最大值 $18\sqrt{2}$,根据几何关系易知三角形 ABC 面积的取值范围为 $(0,18\sqrt{2}]$

……………………………………………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题意,$a_2=1,\dfrac{b_2}{a_2}=\sqrt{3}$,可得双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$,此时 $c=2$, ……………………… 2 分

由双曲线的离心率是椭圆离心率的 3 倍,得 $\dfrac{a_1}{a_2}=3$,可得 $a_1=3,b_1=\sqrt{a_1^2-c^2}=\sqrt{5}$

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ………………………………………………………… 5 分

(2)由过 A 的直线 l 与双曲线的左支相交于与 A 不重合的另一点 B,设直线方程为 $y=k(x+1)$,$(k>\sqrt{3})$.

联立直线和双曲线 $\begin{cases}y=k(x+1)\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 可得 $(3-k^2)x^2-2k^2x-k^2-3=0$, ……………………… 6 分

由韦达定理知,$(-1)x_B=\dfrac{-k^2-3}{3-k^2}$,解得 $x_B=\dfrac{k^2+3}{3-k^2},y_B=\dfrac{6k}{3-k^2}$

可得$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{2k^2}{3-k^2},\frac{6k}{3-k^2}\right)$,$\overrightarrow{EP}=(x_P-1,y_P)$ ………………………………………… 8 分

以 BP 为直径的圆经过双曲线的右顶点 E,可得$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EB}=0$,即$\frac{2k^2}{3-k^2}(x_P-1)+\frac{6ky_P}{3-k^2}=0$

将 $y_P=k(x_P+1)$代入得,$x_P=-\frac{1}{2}$,$y_P=\frac{1}{2}k$. ………………………………………… 10 分

将 P 点坐标代入椭圆可得:$\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{k^2}{4}=1$,解得 $k^2=\frac{175}{9}>3$,故 $k=\frac{5\sqrt{7}}{3}$,

故直线 l 的方程为:$y=\frac{5\sqrt{7}}{3}(x+1)$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)$f(x)$在区间(x_1,x_2)上的立方变化率为正,可得$f(x)$单调递增,即 $a>0$.

故若存在区间(x_1,x_2),使得$f(x)$的值域为$(2x_1,2x_2)$,即存在不同的 x_1,x_2,使得 $e^{ax_1}=2x_1$,$e^{ax_2}=2x_2$,故方程 $e^{ax}=2x$ 有两不等实根,化简得 $a=\frac{\ln(2x)}{x}$有两不等实根. 即 $y=a$ 与 $h(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$有两个不同的交点. ………………………………………… 2 分

由 $h'(x)=\frac{1-\ln(2x)}{x^2}$,可知 $h(x)$在$\left(0,\frac{e}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$上单调递减,且当 $x\to 0$ 时,$h(x)\to-\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to 0$,故要使 $y=a$ 与 $h(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$有两个不同的交点,$0<a<h\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2}{e}$ ………………………………………… 5 分

(2)由对任意区间(x_1,x_2),$f(x)$的立方变化率均大于 $g(x)$的立方变化率,可得$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2^3-x_1^3}>\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2^3-x_1^3}$,由 $x_2>x_1$ 可得,$f(x_2)-f(x_1)>g(x_2)-g(x_1)$,即对任意 $x_2>x_1$,有 $f(x_2)-g(x_2)>f(x_1)-g(x_1)$. ………………………………………… 6 分

可得 $r(x)=f(x)-g(x)=e^{ax}-\left(x+\frac{2}{a}\right)\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)-x$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增.

即 $r'(x)=ae^{ax}-\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)-2\geqslant 0$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立, ………………………………………… 7 分

解法一:①当 $a<0$ 时,当 $x\to+\infty$ 时,$t(x)\to-\infty$,显然不成立. ………………………………………… 8 分

②当 $a>0$ 时,$r'(x)=ae^{ax}-\ln(ax+2)+\ln a-2\geqslant 0$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立,

即 $ae^{ax}+ax+\ln a\geqslant\ln(ax+2)+ax+2$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立, ………………………………………… 9 分

令 $m(x)=x+\ln x$,$ae^{ax}+ax+\ln a\geqslant\ln(ax+2)+ax+2$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立,即 $m(ae^{ax})\geqslant m(ax+2)$.

显然 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,得 $ae^{ax}\geqslant ax+2$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立. 即 $e^{ax}-x-\frac{2}{a}\geqslant 0$恒成立. …………………………………………………………………………………… 10 分

令 $l(x)=e^{ax}-x-\frac{2}{a}$,$l'(x)=ae^{ax}-1$,

可得 $l(x)$在$\left(-\infty,\frac{-\ln a}{a}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$上单调递增,

故 $l\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{\ln a-1}{a}\geqslant 0$,解得 $a\geqslant e$. ………………………………………………… 12 分

解法二:①当 $a<0$ 时,当 $x\to+\infty$ 时,$t(x)\to-\infty$,显然不成立. ……………………………… 8 分

②当 $a>0$ 时,$ae^{ax}-\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)-2\geqslant 0$ 可转化为 $e^{ax}-\frac{2}{a}\geqslant\frac{1}{a}\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)$,

令 $m(x)=e^{ax}-\frac{2}{a}$,$n(x)=\frac{1}{a}\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)$,可得 $m(x)$与 $n(x)$互为反函数,故 $m(x)\geqslant n(x)$恒成立,

只需$m(x)\geqslant x$ 恒成立即可,即 $e^{ax}-x-\frac{2}{a}\geqslant 0$ 恒成立. ………………………………………… 10 分

令 $l(x)=e^{ax}-x-\frac{2}{a}$,$l'(x)=ae^{ax}-1$,可得 $l(x)$在$\left(-\infty,\frac{-\ln a}{a}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$上单调递增,

故 $l\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{\ln a-1}{a}\geqslant 0$,解得 $a\geqslant e$. ……………………………………………………… 12 分

解法三:令 $\varphi(x)=a^2e^{ax}\left(x+\frac{2}{a}\right)-1$,可得 $\varphi'(x)=a^2e^{ax}(ax+3)$ ……………………………… 8 分

①当 $a>0$ 时,$-\frac{3}{a}<-\frac{2}{a}$,此时 $\varphi(x)$在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增,由 $\varphi\left(-\frac{2}{a}\right)=-1<0$,当 $x\to+\infty$ 时,$\varphi(x)\to+\infty$,故在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上存在唯一 x_0,使得 $\varphi(x_0)=0$,即 $a^2e^{ax_0}\left(x_0+\frac{2}{a}\right)=1$. 此时 $r'(x)$在$\left(-\frac{2}{a},x_0\right)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

故 $r'(x)=ae^{ax}-\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)-2\geqslant 0$ 在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立,只需 $r'(x_0)\geqslant 0$ 即可.

而 $r'(x)=ae^{ax_0}-\ln\left(x_0+\frac{2}{a}\right)-2=\frac{1}{a\left(x_0+\frac{2}{a}\right)}+ax_0+2\ln a-2$

$=\frac{1}{a\left(x_0+\frac{2}{a}\right)}+a\left(x_0+\frac{2}{a}\right)+2\ln a-4\geqslant 2-4+2\ln a\geqslant 0$,解得 $a\geqslant e$ ………………………… 10 分

经检验,当 $a=e$ 时等号成立,故 $a\geqslant e$(不检验要扣分) ………………………………………… 11 分

②当 $a<0$ 时,当 $x\to+\infty$ 时,$t(x)\to-\infty$,显然不成立.

故 $a\geqslant e$. …………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。