绝密★启用前

试卷类型:A

高三数学试题

2023.5

本试卷共4页,共22小题,满分150分,考试用时120分钟.

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2. 回答选择题时,选出每个小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后,将答题卡交回.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x<2\}$, $B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$,则

A. $A\subseteq B$ B. $B\subseteq A$

C. $A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$ D. $A\cup B=\{x\mid -3\leqslant x<2\}$

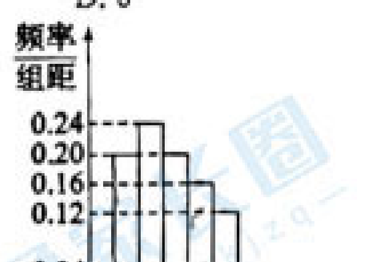
2. 已知复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$(i为虚数单位),则复数 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点 $P(2,y_0)$ 到其焦点的距离为5,则 $p=$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 某组样本数据的频率分布直方图如图所示,设该组样本数据的众数、平均数、第一四分位数分别为 x_1,x_2,x_3,则 x_1,x_2,x_3 的大小关系是(注:同一组中数据用该组区间中点值近似代替)



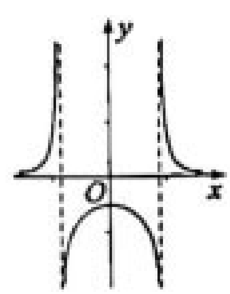
A. $x_3<x_1<x_2$ B. $x_2<x_1<x_3$

C. $x_1<x_3<x_2$ D. $x_1<x_2<x_3$

5. 已知直线 $l:mx+ny=1$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相切,则 mn 的最大值为

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. 1 D. 2

6. 函数 $f(x)=\dfrac{3+\cos x}{ax^2-bx+c}$ 的图象如图所示,则



A. $a>0,b=0,c<0$ B. $a<0,b=0,c<0$

C. $a<0,b<0,c=0$ D. $a>0,b=0,c>0$

7. 设 $a=\sin\dfrac{1}{4}$, $b=\sqrt[4]{e}-1$, $c=\ln\dfrac{5}{4}$,则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$ B. $b>a>c$ C. $b>c>a$ D. $c>b>a$

8. 在正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB=4\sqrt{2}$，$PA=4\sqrt{5}$，过侧棱 PA 的延长线上一点 A_1 作与平面 $ABCD$ 平行的平面，分别与侧棱 PB，PC，PD 的延长线交于点 B_1，C_1，D_1. 设几何体 $P\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 和几何体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的外接球半径分别为 R_1 和 R_2，当 $\dfrac{R_2}{R_1}$ 最小时，$\dfrac{PA}{PA_1}=$

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-4)$，则下列说法正确的是

A. 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，则 $m=5$　　B. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $m=-2$

C. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=-1$　　D. 若 $m=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角

10. 下列说法正确的是

A. 已知经验回归方程 $\hat{y}=0.5x-0.78$，则当 $x=26$ 时，$\hat{y}$ 的估计值为 12.22

B. 在回归分析中，残差点分布的带状区域的宽度越窄表示拟合效果越差

C. 在经验回归方程 $\hat{y}=-0.3x+10$ 中，当解释变量每增加 1 个单位时，响应变量将平均减少 0.3 个单位

D. 在一元线性回归模型分析中，决定系数 R^2 用来刻画模型的拟合效果，若 R^2 的值越小，则模型的拟合效果越好

11. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x\ (\omega>0)$，满足 $f(\dfrac{\pi}{6})=2$，则下列结论正确的是

A. $y=f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$

B. ω 的最小值为 2

C. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 对称

D. $y=f(x-\dfrac{\pi}{3})$ 是偶函数

12. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且满足 $f(3+x)-f(3-x)+6x=0$，函数 $f(1-2x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，则

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称　　B. 8 是 $f(x)$ 的一个周期

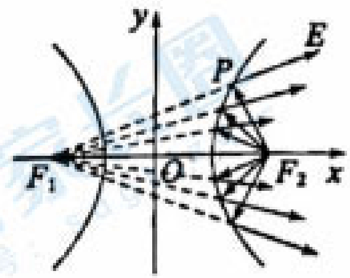
C. $f(x)$ 一定存在零点　　D. $f(101)=-299$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1-x)^6$ 的展开式中，含 x^3 的项的系数为________.（用数字表示）

14. 一个袋子中装有除颜色外完全相同的 5 个球，其中 2 个白球，3 个黑球，现从袋子中有放回地随机取球 4 次，每次取一个球，取到白球记 2 分，取到黑球记 0 分，记 4 次取球的总分数为 X，则 X 的方差 $D(X)=$________.

15. 圆锥曲线的光学性质被人们广泛地应用于各种设计中，例如从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线镜面反射后，反射光线的反向延长线经过另一个焦点. 如图，从双曲线 C 的右焦点 F_2 发出的光线通过双曲线镜面反射，且反射光线的反向延长线经过左焦点 F_1. 已知入射光线 F_2P 的斜率为 -2，且 F_2P 和反射光线 PE 互相垂直(其中 P 为入射点)，则双曲线 C 的渐近线方程为________.



16. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_{n+1}=4a_n+1$，$b_n=a_{n+1}-2a_n$，则 $b_n=$________；若数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，且 $c_1=1$，$c_n+(-1)^n c_{n+1}=2\log_2 b_n+1$，则 $T_{88}=$________. (第一个空 2 分，第二个空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知$\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2\cos(B-C)\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(B+C)$.

(1)若 $B=C$，求 A；

(2)求$\dfrac{b^2+c^2}{a^2}$的值.

18. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，$2a_{n+1}-a_n=a_na_{n+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

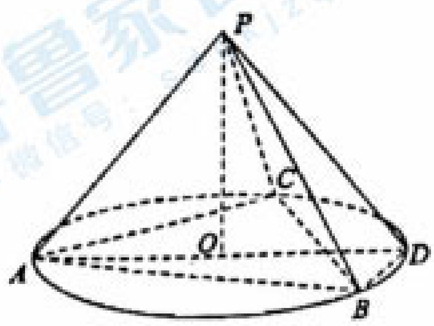
(2)证明：$2a_1a_2+2^2a_2a_3+\cdots+2^na_na_{n+1}<\dfrac{1}{3}$.

19. (12 分)

如图，圆锥 PO 的母线长为$\sqrt{6}$，侧面积为 $2\sqrt{6}\pi$，$\triangle ABC$ 是圆O 的内接正三角形.

(1)证明：$AP\perp$平面 PBC；

(2)若 AD 是圆O 的直径，求二面角 A-PB-D 的余弦值.



20. (12 分)

山东省教育厅颁布的《山东省普通中小学办学基本规范》中提到，保证学生在校期间每天校园体育活动时间不少于 1 小时. 小明为了响应号召，缓解学习压力，计划每天利用课间进行 3 次体育锻炼，每次锻炼项目为跑步、跳绳、踢毽子三个项目之一. 已知小明每次锻炼项目只与前一次锻炼项目有关，在前一次锻炼某项目

的概率如下表：

前一次	本次		
	跑步	跳绳	踢毽子
跑步	0.5	0.2	0.3
跳绳	0.3	0.1	0.6
踢毽子	0.3	0.6	0.1

(1)已知小明在第1次锻炼时选择了跳绳，则他在第3次锻炼时选择哪个项目的可能性最大？

(2)已知小明选择各锻炼项目每次运动时间如下表：

锻炼项目	跑步	跳绳	踢毽子
锻炼时间(分钟/次)	6	4	8

若当天小明除了3次体育锻炼和一节45分钟的体育课(户外运动)外，无其他校园体育活动时间. 已知小明在第1次锻炼时选择了跳绳，求小明当天课间三次体育锻炼总时间的分布列和当天总运动时间的期望，并根据运算结果说明小明当天的运动时间是否符合《山东省普通中小学办学基本规范》的要求.

21.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，其短轴的一个端点到焦点 F_1 的距离为 $\sqrt{5}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若 P 为 OF_1 的中点，M 为椭圆上一点，过 P 且平行于 OM 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，是否存在实数 λ，使得 $\lambda|OM|^2=|PA|\cdot|PB|$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+a}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{e}$，求 $f(x)$ 的单调区间；

($e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数)

(2)设 $a=-1$，证明：$(x+2)f(x)>e$，$x\in(1,+\infty)$.(参考数据：$\ln2\approx0.693$)

高三数学试题参考答案

2023.5

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.C　2.B　3.D　4.A　5.B　6.A　7.B　8.C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.BD　　10.AC　　11.AC　　12.ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -20　　14. $\frac{96}{25}$（或 3.84）　　15. $2x+y=0$ 和 $2x-y=0$

16. 2^n，2143（第一个空 2 分，第二个空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

解：(1)若 $B=C$，则 $\cos(B-C)=1$. …………………………………… 1 分

因为 $2\cos(B-C)\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(B+C)$，

所以 $2\cos A+\cos 2A=1+2\cos(\pi-A)\cos A$，…………………………………… 2 分

$2\cos A+2\cos^2 A-1=1-2\cos^2 A$ …………………………………… 3 分

整理得 $2\cos^2 A+\cos A-1=0$. …………………………………… 4 分

解得 $\cos A=-1$（舍），$\cos A=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 5 分

(2)因为 $2\cos(B-C)\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(B+C)$，

所以 $2[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\cos A=1-\cos 2A$，…………………………………… 6 分

整理得 $2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$ …………………………………… 7 分

由正弦定理得 $2bc\cos A=a^2$，…………………………………… 8 分

由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=a^2$，…………………………………… 9 分

所以$\frac{b^2+c^2}{a^2}=2$. …………………………………… 10 分

18.（12 分）

解：(1)因为 $2a_{n+1}-a_n=a_na_{n+1}$，

所以$\frac{2}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=1$，即$\frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}-1$，

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=2(\dfrac{1}{a_n}-1)$. ………………………………………………………… 1分

又因为$\dfrac{1}{a_1}-1=2$, ………………………………………………………… 2分

所以$\dfrac{\dfrac{1}{a_{n+1}}-1}{\dfrac{1}{a_n}-1}=2$, ………………………………………………………… 3分

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$是以2为首项,2为公比的等比数列. ………………………… 4分

所以$\dfrac{1}{a_n}-1=2^n$, ………………………………………………………… 5分

即$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}$. ………………………………………… 6分

(2)$2^n a_n a_{n+1}=\dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$, ………………………… 7分

所以$2a_1a_2+2^2a_2a_3+\cdots+2^na_na_{n+1}$

$=(\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1})+(\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1})$ ………………… 8分

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$, ………………………………………………………… 10分

又$\dfrac{1}{2^{n+1}+1}>0$, ………………………………………………………… 11分

所以$2a_1a_2+2^2a_2a_3+\cdots+2^na_na_{n+1}<\dfrac{1}{3}$. ………………………………………… 12分

19.(12分)

解:(1)证明:设圆O的半径为r,

因为圆锥的母线长为$\sqrt{6}$,侧面积为$2\sqrt{6}\pi$,

所以$\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}\pi$,解得$r=2$. ………………………………………… 1分

因为$\triangle ABC$是圆O的内接正三角形,且$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB$,

所以$AB=2\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 2分

在$\triangle ABP$中,$AP=BP=\sqrt{6}$,$AB=2\sqrt{3}$,

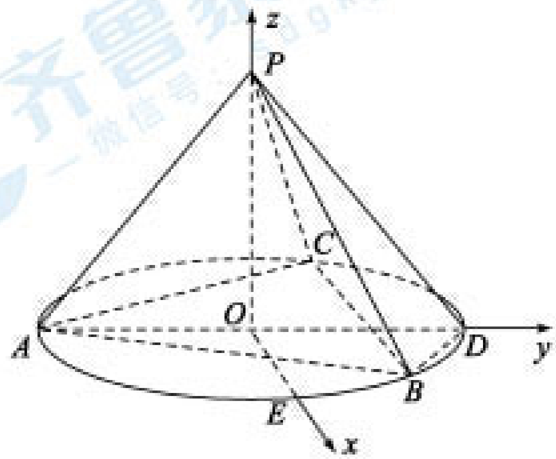
所以$AP^2+BP^2=AB^2$,故$AP\perp PB$,

同理可得，$AP\perp PC$ ………………………………………………………………………… 3 分

又因为 $PB\cap PC=P$

所以 $AP\perp$ 平面 PBC； ……………………………………………………………………… 4 分

(2)过点 O 做 $OE\parallel CB$，交圆 O 于点 E，以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………… 5 分



所以 $A(0,-2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\overrightarrow{DP}=(0,-2,\sqrt{2})$. ………………………………………… 6 分

设平面 ABP 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}\sqrt{3}x_1+3y_1=0,\\ 2y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x_1=-\sqrt{3}y_1,\\ z_1=-\sqrt{2}y_1,\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 7 分

取 $y=-1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},-1,\sqrt{2})$. ……………………………………………………… 8 分

设平面 DBP 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ -2y_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}\sqrt{3}x_2=y_2,\\ z_2=\sqrt{2}y_2,\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 9 分

取 $x_2=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},\sqrt{6})$. ……………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，………………………… 11 分

由题意知，二面角 $A\text{-}PB\text{-}D$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $A\text{-}PB\text{-}D$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………

20.（12 分）

解：设事件 A_i＝"第 i 次锻炼项目为跑步"，事件 B_i＝"第 i 次锻炼项目为跳绳"，

事件 C_i＝"第 i 次锻炼项目为踢毽子"$(i=1,2,3)$.

(1)因为小明在第 1 次锻炼时选择了跳绳，所以 $P(B_1)=1$.

又因为 $A_3=B_1A_2A_3+B_1B_2A_3+B_1C_2A_3$，

所以 $P(A_3)=P(B_1A_2A_3+B_1B_2A_3+B_1C_2A_3)$

$=P(B_1A_2A_3)+P(B_1B_2A_3)+P(B_1C_2A_3)$

$=P(B_1)\cdot P(A_2|B_1)\cdot P(A_3|B_1A_2)+P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)\cdot P(A_3|B_1B_2)$

$+P(B_1)\cdot P(C_2|B_1)\cdot P(A_3|B_1C_2)$

$=1\times0.3\times0.5+1\times0.1\times0.3+1\times0.6\times0.3=0.36$

同理可得，

$P(B_3)=1\times0.3\times0.2+1\times0.1\times0.1+1\times0.6\times0.6=0.43$，

$P(C_3)=1\times0.3\times0.3+1\times0.1\times0.6+1\times0.6\times0.1=0.21$. ………………………… 3 分

因为 $P(B_3)>P(A_3)>P(C_3)$

所以小明在第 3 次锻炼时，选择跳绳的可能性最大. ………………………………… 4 分

(2)先算课间三次体育锻炼总时间，小明在第 1 次锻炼时选择了跳绳，当天锻炼项目选择的所有情况有：$B_1A_2A_3$，$B_1A_2B_3$，$B_1A_2C_3$，$B_1B_2A_3$，$B_1B_2B_3$，$B_1B_2C_3$，$B_1C_2A_3$，$B_1C_2B_3$，$B_1C_2C_3$ 共 9 种，………………………………………………………… 5 分

课间三次体育锻炼总时间用 X 表示，则 X 的所有可能取值为 12，14，16，18，20. ……… 6 分

$P(X=12)=P(B_1B_2B_3)=1\times0.1\times0.1=0.01$

$P(X=14)=P(B_1A_2B_3)+P(B_1B_2A_3)=1\times0.3\times0.2+1\times0.1\times0.3=0.09$，

$P(X=16)=P(B_1A_2A_3)+P(B_1B_2C_3)+P(B_1C_2B_3)$

$=1\times0.3\times0.5+1\times0.1\times0.6+1\times0.6\times0.6=0.57$，

$P(X=18)=P(B_1A_2C_3)+P(B_1C_2A_3)=1\times0.3\times0.3+1\times0.6\times0.3=0.27$

$P(X=20)=P(B_1C_2C_3)=1\times0.6\times0.1=0.06$ ……………………………………… 8 分

所以小明在第 1 次锻炼时选择了跳绳，其当天课间三次体育锻炼总时间 X 的分布列为

X	12	14	16	18	20
P	0.01	0.09	0.57		

…………………………………………………………………

设当天总运动时间为 Y，根据题意，Y＝X＋45，

则 $E(Y)=E(X+45)$

$=E(X)+45$

$=12\times0.01+14\times0.09+16\times0.57+18\times0.27+20\times0.06+45$

$=61.56$ …………………………………………………………………… 11 分

因为 $E(Y)>60$，

所以小明在第 1 次锻炼时选择跳绳的情况下，当天总运动时间 Y 的期望为 61.56 分钟，多于 1 小时，可以达到《山东省普通中小学办学基本规范》的要求. ………………… 12 分

21.(12 分)

解：(1)由题意，得 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{5}$，…………………………………………… 1 分

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $c=2$，…………………………………………………… 2 分

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，……………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$. …………………………………………… 4 分

(2)若直线 l 的斜率不存在，则 $|OM|=1$，$|PA|=|PB|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

由 $\lambda|OM|^2=|PA|\cdot|PB|$，得 $\lambda=\dfrac{4}{5}$，………………………………………… 5 分

若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，

由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，得 $(5k^2+1)x^2+10k^2x+5k^2-5=0$，………………… 6 分

$\Delta=(10k^2)^2-4(5k^2+1)(5k^2-5)>0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 x_1,x_2 是上述方程的两个实根，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{10k^2}{5k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{5k^2-5}{5k^2+1}$，…………………………………… 7 分

由题意 $|PA|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1+1|$，$|PB|=\sqrt{k^2+1}\,|x_2+1|$，………………………… 8 分

所以 $|PA|\cdot|PB|=(k^2+1)|(x_1+1)(x_2+1)|$

$=(k^2+1)|x_1x_2+(x_1+x_2)+1|=\dfrac{4(k^2+1)}{5k^2+1}$ ………………………… 9 分

由题意知，直线 OM 的方程为 $y=kx$，由 $\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，

得 $(5k^2+1)x^2-5=0$，设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=\dfrac{5}{5k^2+1}$，………………………… 10 分

所以 $|OM|^2=x_0^2+y_0^2=\dfrac{5(k^2+1)}{5k^2+1}$，…………………………

由 $\lambda|OM|^2=|PA|\cdot|PB|$，得 $\lambda=\frac{4}{5}$.

综上，存在实数 $\lambda=\frac{4}{5}$，使得 $\lambda|OM|^2=|PA|\cdot|PB|$ 成立. …………………… 12 分

22.（12 分）

解：(1) 由题意，切点 $(e,f(e))$ 在切线 $y=\frac{1}{e}$ 上，得 $f(e)=\frac{1}{e}$，即 $\frac{1}{e+a}=\frac{1}{e}$，得 $a=0$， … 1 分

所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$， …………………… 2 分

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$；由 $f'(x)<0$，得 $x>e$， …………………… 3 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$ …………………… 4 分

(2) 当 $a=-1$ 时，$(x+2)f(x)>e$，即 $\frac{(x+2)\ln x}{x-1}>e$，即证 $(x+2)\ln x-e(x-1)>0$，

令 $h(x)=(x+2)\ln x-e(x-1)$，则问题转化为证明 $h(x)>0(x>1)$，…………… 5 分

$h'(x)=\ln x+\frac{2}{x}+1-e$，令 $\varphi(x)=\ln x+\frac{2}{x}+1-e$，则 $\varphi'(x)=\frac{x-2}{x^2}$，

由 $\varphi'(x)<0$，得 $1<x<2$；由 $\varphi'(x)>0$，得 $x>2$，

所以 $h'(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，…………………… 6 分

而 $h'(1)=3-e>0$，$h'(2)=2+\ln 2-e<0$，$h'(e)=2+\frac{2}{e}-e>0$，…………………… 7 分

所以存在 $x_1\in(1,2)$，$x_2\in(2,e)$，使得 $h'(x_1)=h'(x_2)=0$， …………………… 8 分

故 $h(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=\min\{h(1),h(x_2)\}$.

又 $h(1)=0$，所以只需证明 $h(x_2)>0$ 即可. …………………… 9 分

由题意 $h(x_2)=(x_2+2)\ln x_2-e(x_2-1)$，①

由 $h'(x_2)=0$，得 $e=\ln x_2+\frac{2}{x_2}+1$，②

将②代入①得 $h(x_2)=3\ln x_2-x_2-1+\frac{2}{x_2}(2<x_2<e)$ …………………… 10 分

令 $g(x)=3\ln x-x-1+\frac{2}{x}(2<x<e)$，

则 $g'(x)=\frac{-(x-1)(x-2)}{x^2}<0$，

故 $g(x)$ 在 $(2,e)$ 上单调递减，则 $h(x_2)>h(e)=2+\frac{2}{e}$ 11 分

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，不等式得证. …………………… 12 分