2022—2023学年度第二学期质量检测

高一数学试题参考答案

2023.07

一、选择题：每小题5分，共40分。

1.B　2.A　3.C　4.A　5.D　6.C　7.B　8.C

8.解析：在$\triangle PAB$中，$\dfrac{BP}{\sin\angle PAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}$.①

在$\triangle PAC$中，$\dfrac{PC}{\sin\angle PAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle APC}$.②

因为$AB=AC$，$\sin\angle PAB=2\sin\angle PAC$，$\sin\angle APB=\sin\angle APC$，

由①:②得$BP=2PC$，

易求$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，所以$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

二、选择题：每小题5分，共20分。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9.AB　10.BD　11.ACD　12.ABD

三、填空题：每小题5分，共20分。

13.4　14.-4　15.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　16.$\dfrac{13}{8}$

16.解析：由条件可得$\sin B\cos A=\sin A+\sin A\cos B$　$\therefore\sin(B-A)=\sin A$

$\because 0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore -\dfrac{\pi}{2}<B-A<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore B-A=A$，即$B=2A$，$\therefore C=\pi-B-A=\pi-3A$.

由$\triangle ABC$为锐角三角形得$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<2A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\pi-3A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$.

$$\therefore\frac{3b-c}{2a}=\frac{3\sin B-\sin C}{2\sin A}=\frac{3\sin 2A-\sin 3A}{2\sin A}=\frac{6\sin A\cos A-\sin 2A\cos A-\cos 2A\sin A}{2\sin A}$$

$$=\frac{6\sin A\cos A-2\sin A\cos^2 A-\cos 2A\sin A}{2\sin A}=3\cos A-\cos^2 A-\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$=3\cos A-\cos^2 A-\cos^2 A+\frac{1}{2}=-2\cos^2 A+3\cos A+\frac{1}{2}=-2\left(\cos A-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{13}{8}，\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

所以，当$\cos A=\dfrac{3}{4}$时，$\dfrac{3b-c}{2a}$取得最大值$\dfrac{13}{8}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。

17.解：(1)由题意知

$(0.01+0.07+m+0.04+0.02)\times 5=1$ ………………………………………… 3分

解得 $m=0.06$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $0.01\times5=0.05<0.8$,

$(0.01+0.07)\times5=0.4<0.8$,

$(0.01+0.07+0.06)\times5=0.7<0.8$,

$(0.01+0.07+0.06+0.04)\times5=0.9>0.8$,

所以该样本的 80% 分位数一定位于[90,95)内, ………………………………… 8 分

由 $90+5\times\frac{0.8-0.7}{0.9-0.7}=92.5$

可以估计该样本的 80% 分位数为 92.5. ………………………………………… 10 分

18. 解:(1)因为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,

所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1-4|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\boldsymbol{b}|^2=3$,

即 $2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|-1=0$, …………………………………………………… 3 分

解得 $|\boldsymbol{b}|=1$. …………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=6\times1-2\times1-1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ ……………………………………… 6 分

$\boldsymbol{m}^2=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+1+4\times\frac{1}{2}=7$,

所以 $|\boldsymbol{m}|=\sqrt{7}$. …………………………………………………………… 8 分

同理 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{7}$. …………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{2}$, …………………………… 11 分

又 $<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\in[0,\pi]$,所以 $<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\pi}{3}$,

故 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 12 分

19. 解:(1) $f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x$ … 2 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$, ……………………………… 4 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以,$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ……………………… 6 分

(2)由 $f(\frac{\alpha}{2})=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$,得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$. ……………………… 7 分

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,

所以 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}=-\frac{4}{5}$， ………………………………………… 9 分

所以 $\cos\alpha=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$，

$=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)法一：连接 AC_1 交 A_1E 于点 F，连接 C_1E，DF，

因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 为三棱台，$AB=2A_1B_1$，所以 $AC=2A_1C_1$，

又 E 为 AC 的中点，所以 $AE//A_1C_1$，$AE=A_1C_1$

所以四边形 AA_1C_1E 为平行四边形， ………………………………………… 3 分

所以 F 为 AC_1 的中点，又 D 为 AB 的中点，所以 $DF//BC_1$， ………………………… 4 分

又 $DF\subset$平面 A_1DE，$BC_1\not\subset$平面 A_1DE，

所以 $BC_1//$平面 A_1DE. ………………………………………… 6 分

法二：∵D，E 分别为 AB，AC 的中点，∴$DE//BC$，

又 $DE\not\subset$平面 BB_1C_1C，$BC\subset$平面 BB_1C_1C，

∴$DE//$平面 BB_1C_1C. ………………………………………… 2 分

∵$A_1B_1//AB$，D 为 AB 的中点，$AB=2A_1B_1$，∴$A_1B_1=BD$，$A_1B_1//BD$，

∴四边形 A_1B_1BD 为平行四边形，∴$A_1D//BB_1$，

又 $A_1D\not\subset$平面 BB_1C_1C，$B_1B\subset$平面 BB_1C_1C，

∴$A_1D//$平面 BB_1C_1C， ………………………………………… 4 分

又 $A_1D\cap A_1E=A_1$，∴平面 $A_1DE//$平面 BB_1C_1C. ………………………… 5 分

又 $BC_1\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $BC_1//$平面 A_1DE. ………………………… 6 分

(2)设$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 S，则由题意知$\triangle ABC$ 的面积为 $4S$，$\triangle ADE$ 的面积为 S，

设三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h，则 $V_{A_1-ADE}=\frac{1}{3}Sh=1$. ………………………… 9 分

所以 $V_{A_1B_1C_1-ABC}=\frac{1}{3}(S+4S+\sqrt{S\times4S})h=\frac{7}{3}Sh=7$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $\sin^2A+\cos^2B+\cos^2C=2+\sin B\sin C$，

所以 $\sin^2A+1-\sin^2B+1-\sin^2C=2+\sin B\sin C$，

即 $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$， ………………………………………… 2 分

由正弦定理得 $a^2-b^2-c^2=bc$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$ ………………………… 4 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$， ………………………………………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $3=b^2+c^2+bc$. ………………………… 8 分

所以 $3=b^2+c^2+bc\geqslant2bc+bc=3bc$，

即 $bc\leqslant1$(当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立). ………………………………………… 9 分

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

所以$\frac{1}{2}\times c\times b\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times c\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times b\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}$，

解得 $AD=\frac{bc}{b+c}$， ………………………………………………………………………… 10 分

因为 $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$（当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立），

所以 $AD=\frac{bc}{b+c}\leqslant\frac{bc}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{bc}\leqslant\frac{1}{2}$（当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立），

所以 AD 长度的最大值为$\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

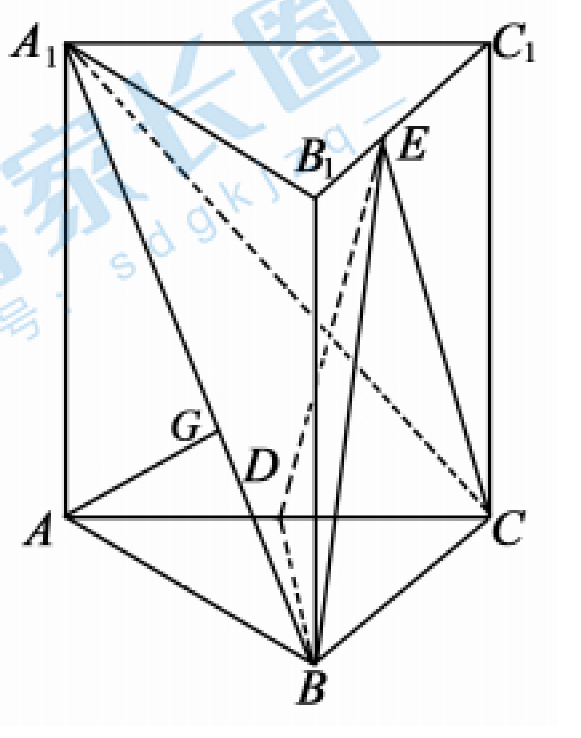
22. 解：(1) ∵$ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，∴$AA_1\perp$平面 ABC，

又 $BC\subset$平面 ABC，∴$AA_1\perp BC$， …………………………………………………………… 1 分

过点 A 作 $AG\perp A_1B$，垂足为 G.

∵平面 $A_1BC\perp$平面 AA_1B_1B，平面 $A_1BC\cap$平面 $AA_1B_1B=A_1B$，

∴$AG\perp$平面 A_1BC，



又 $BC\subset$平面 A_1BC，∴$AG\perp BC$， …………………………… 2 分

又 $AA_1\perp BC$，$AG\cap AA_1=A$，

∴$BC\perp$平面 AA_1B_1B. ……………………………………… 3 分

∴$BC\perp AB$.

∴$\triangle ABC$ 为直角三角形. …………………………………… 4 分

(2) 由(1)知，$BC\perp$平面 A_1AB，

∴$BC\perp AB$，$BC\perp A_1B$，

∴$\angle A_1BA$ 即为二面角 A_1-BC-A 的平面角，…………… 6 分

∴$\angle A_1BA=45°$，

∴$AA_1=AB=BC=2$， ……………………………………………………………………… 7 分

作 $CH\perp$平面 BDE，垂足为 H，则$\angle CBH$ 为直线 BC 与平面 BDE 所成的角. ……… 8 分

∵$DA=DB=DC=\sqrt{2}$，$BE=DE=\sqrt{5}$

∴$S_{\triangle BCD}=1$，……………………………………………………………………………… 9 分

$S_{\triangle BDE}=\frac{3}{2}$. …………………………………………………………………………… 10 分

∵$V_{E-BCD}=V_{C-BDE}$，

∴$\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times BB_1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BDE}\times CH$，即$\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times CH$，

∴$CH=\frac{4}{3}$. ……………………………………………………………………………… 11 分

∴$\sin\angle CBH=\frac{CH}{BC}=\frac{2}{3}$，

∴直线 BC 与平面 BDE 所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$. ……………………………………………… 12 分