合肥市2023年高三第二次教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.

1. B　2. C　3. B　4. C　5. A　6. B　7. C　8. D

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分.

9. ABD　10. ACD　11. BC　12. ACD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分.

13. 0　14. 2　15. $\frac{1}{3}$　16. $4\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

四、解答题：本大题共6小题，满分70分.

17.（本小题满分10分）

解析：由题意知，$\angle PAD=15^\circ$，$\angle PBD=45^\circ$，$\angle PCE=30^\circ$，$\angle APB=30^\circ$，

在ΔPAB中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，$\frac{1.4}{\sin 30^\circ}=\frac{PB}{\sin 15^\circ}$，所以$PB=2.8\sin 15^\circ$，

在ΔPBC中，由正弦定理得$\frac{PB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BPC}$，$\frac{PB}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin 105^\circ}$，　…………5分

所以$BC=\frac{PB}{\sin 30^\circ}\times\sin 105^\circ=2PB\cdot\sin 105^\circ=5.6\sin 15^\circ\sin 105^\circ=5.6\sin 15^\circ\cos 15^\circ=2.8\sin 30^\circ=1.4$，

所以$DE=BC-BD-EC=1.4-0.2-0.5=0.7(\mathrm{km})$，

即隧道DE的长为$0.7\ \mathrm{km}$.　…………10分

18.（本小题满分12分）

解析：(1)由题意得，$a_{n+1}=S_n+1$；当$n\geq 2$时，$a_n=S_{n-1}+1$，

两式相减得$a_{n+1}-a_n=a_n$，即$a_{n+1}=2a_n$，

又因为$a_2=S_1+1=a_1+1=2=2a_1$，所以当$n\geq 1$时，$a_{n+1}=2a_n$，

所以$\{a_n\}$成等比数列，$a_n=2^{n-1}$.　…………6分

(2)由(1)得，$b_n=na_n=n\cdot 2^{n-1}$，

所以，　$T_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$①，

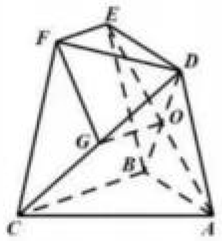
①×2得，$2T_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$②

①−②得，$-T_n=1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=2^n-1-n\cdot 2^n=-(n-1)\cdot 2^n-1$，

所以$T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$.　…………12分

19.（本小题满分12分）

解析：(1)连接AE，交BD于点O，连接GO.



在菱形 $ABED$ 中，$AE\perp BD$．

因为 $CB\perp$ 平面 $ABED$，所以 $CB\perp AE$．

又因为 $CB\cap BD=B$，所以 $AE\perp$ 平面 CBD．

因为 $GO=\frac{1}{2}CB$，$GO\parallel CB$，且 $FE\parallel CB$，$FE=\frac{1}{2}CB$，

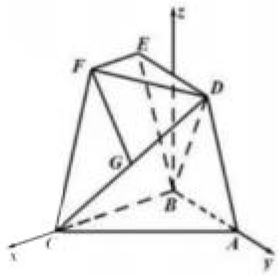
所以 $FE\parallel GO$，且 $FE=GO$，

所以四边形 $EFGO$ 为平行四边形，所以 $FG\parallel EO$，

所以 $FG\perp$ 平面 CBD．　……………………………………6 分

(2) 如图，以 B 为坐标原点，分别以 BC，BA 所在直线为 x，y 轴建立空间直角坐标系，如图.

设 $BC=2a$，则 $A(0,\ 2a,\ 0)$，$C(2a,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ a,\ \sqrt{3}a)$，$G\left(a,\ \frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$F(a,\ -a,\ \sqrt{3}a)$.



设平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2ax-2ay=0\\ -ay+\sqrt{3}az=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，

因为 $\overrightarrow{FG}=\left(0,\ \frac{3a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，

记直线 FG 与平面 ACD 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{FG},\vec{m}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{FG}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{FG}\right|\left|\vec{m}\right|}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以，直线 FG 与平面 ACD 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{7}}{7}$．……………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解析：(1) 由题意得，X 的可能取值有 0，1，2，3，所以

$P(X=0)=\frac{C_9^3}{C_{16}^3}=\frac{3}{20}$，$P(X=1)=\frac{C_9^2C_7^1}{C_{16}^3}=\frac{9}{20}$，$P(X=2)=\frac{C_9^1C_7^2}{C_{16}^3}=\frac{27}{80}$，$P(X=3)=\frac{C_7^3}{C_{16}^3}=\frac{1}{16}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{1}{16}$

所以，X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{27}{80}+3\times\frac{1}{16}=\frac{21}{16}$．……………………………………6 分

(2) 由题意得，根据所给数据，得到 2×2 列联表：

	GRPE 蛋白干预	非 GRPE 蛋白干预	合计
体征状况严重	2	5	7
体征状况不严重	6	3	9
合计	8	8	16

零假设为：H_0：实验鼠体征状况与 GRPE 蛋白干预没有关系.

利用列联表中的数据得，$\chi^2=\dfrac{16\times(2\times3-5\times6)^2}{8\times8\times7\times9}=\dfrac{16}{7}\approx2.286<2.706=x_{0.1}$，

根据小概率值$\alpha=0.1$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，因此可认为H_0成立，即认为实验鼠体征状况与*GRPE*蛋白干预无关. ……………………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解析：(1) 由题意得$p=2$，所以抛物线C的方程为$y^2=4x$.

由$\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{BE}$得$|AE|=4|BE|$.

过B作$BB_1\perp l$于点B_1，过A作$AA_1\perp l$于点A_1，$BB_1\parallel AA_1$，且$|AA_1|=4|BB_1|$，

由抛物线定义知，$|BF|=|BB_1|$，$|AF|=|AA_1|$，

所以$\dfrac{|FA|}{|FB|}=\dfrac{|AA_1|}{|BB_1|}=4$，即$\dfrac{|FA|}{|FB|}=4$. ……………………………………5 分

(2) 设点$B(x_0,y_0)\ (y_0>0)$，$E(-1,0)$，所以$A(4x_0+3,4y_0)$，所以$\begin{cases}y_0^2=4x_0,\\16y_0^2=4(4x_0+3),\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{4}\\y_0=1\end{cases}$，所以$A(4,4)$.

设切线AP，AQ的斜率为k_1，k_2，因为$AM\perp x$轴，由对称性知$k_1+k_2=0$，

设直线PQ的方程为$x=my+n$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

将直线PQ的方程代入抛物线方程得$y^2-4my-4n=0\ (*)$，所以$\begin{cases}y_1+y_2=4m,\\y_1y_2=-4n,\end{cases}$

所以$k_1=\dfrac{y_1-4}{x_1-4}=\dfrac{y_1-4}{\dfrac{y_1^2}{4}-4}=\dfrac{4}{y_1+4}$，同理得$k_2=\dfrac{4}{y_2+4}$，

所以$k_1+k_2=\dfrac{4}{y_1+4}+\dfrac{4}{y_2+4}=4\cdot\dfrac{(y_1+4)+(y_2+4)}{(y_1+4)(y_2+4)}=4\cdot\dfrac{y_1+y_2+8}{(y_1+4)(y_2+4)}=0$，

所以$y_1+y_2+8=0$，即$4m+8=0$，$m=-2$，代入方程$(*)$，由$\Delta=64+16n>0$得$n>-4$，

因为直线AP的方程为$y-4=\dfrac{y_1-4}{x_1-4}(x-4)$，即$y-4=\dfrac{y_1-4}{\dfrac{y_1^2}{4}-4}(x-4)=\dfrac{4}{y_1+4}(x-4)$，

所以$4x-(y_1+4)y+4y_1=0$.

因为直线AP与圆M相切，所以$\dfrac{|16+4y_1|}{\sqrt{16+(y_1+4)^2}}=r$，即$(y_1+4)^2=\dfrac{16r^2}{16-r^2}$，

不妨设$-4<y_1<4$，所以$y_1=\dfrac{4r}{\sqrt{16-r^2}}-4$，

所以$n=x_1+2y_1=\dfrac{y_1^2}{4}+2y_1=\dfrac{1}{4}y_1(y_1+8)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4r}{\sqrt{16-r^2}}-4\right)\left(\dfrac{4r}{\sqrt{16-r^2}}+4\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{16^2}{16-r^2}-32\right)$，

因为$0<r\le2\sqrt{3}$，n随r的增大而增大，所以$n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{16^2}{16-r^2}-32\right)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{16^2}{16-12}-32\right)=8$

所以$-4<n\le8$

直线PQ的方程为$x=-2y+n$，即$x+2y-n=0$，$\begin{cases}y_1+y_2=-8,\\y_1y_2=-4n,\end{cases}$

所以$|PQ|=\sqrt{5}|y_1-y_2|=\sqrt{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{5n+20}$，

点 A 到直线 PQ 的距离为 $d=\dfrac{|12-n|}{\sqrt{5}}$，

所以 $S_{\Delta APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot|PQ|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|12-n|}{\sqrt{5}}\cdot 4\sqrt{5n+20}=2\sqrt{(n+4)(12-n)^2}$，

令 $f(n)=(n+4)(12-n)^2\,(-4<n\le 8)$，

则 $f'(n)=(12-n)^2+(n+4)\cdot 2(12-n)(-1)=(12-n)(4-3n)$，

当 $-4<n<\dfrac{4}{3}$ 时，$f'(n)>0$；当 $\dfrac{4}{3}<n\le 8$ 时，$f'(n)<0$，

所以当 $n=\dfrac{4}{3}$ 时，$f(n)$ 取得最大值，

所以 ΔAPQ 面积的最大值为 $2\sqrt{f\left(\dfrac{4}{3}\right)}=\dfrac{256\sqrt{3}}{9}$. ……………………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

解析：函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}mx^2-(2m+1)x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{2}{x}+mx-(2m+1)=\dfrac{mx^2-(2m+1)x+2}{x}=\dfrac{(mx-1)(x-2)}{x}$.

(1) 因为函数 $y=f(x)$ 仅有一条垂直于 y 轴的切线，

所以 $f'(x)=\dfrac{(mx-1)(x-2)}{x}=0$ 有唯一正实数解，

所以 $m\le 0$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$，所以 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m\le 0\text{ 或 }m=\dfrac{1}{2}\right\}$. …………………………………5 分

(2) 因为 $f'(x)=\dfrac{(mx-1)(x-2)}{x}$.

①当 $m\le 0$ 时，因为 $x>0$，所以 $mx-1<0$，

所以，当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$，单调递减区间是 $(2,+\infty)$，

此时 $f(2)=2\ln 2+2m-2(2m+1)=2\ln 2-2m-2$，

当 $m=\ln 2-1$ 时，$f(2)=0$，函数 $f(x)$ 只有一个零点，$x=2$；

当 $\ln 2-1<m\le 0$ 时，$f(2)<0$，函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $m<\ln 2-1$ 时，因为当 $x\to 0^+$ 或 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，且 $f(2)>0$，

所以函数 $f(x)$ 分别在 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上，各有唯一零点，此时函数 $f(x)$ 有两个零点.

②当 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{m}>2$，在 $x\in(0,2)$ 和 $x\in\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 上，$f'(x)>0$；在 $x\in\left(2,\dfrac{1}{m}\right)$ 上，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(2,\dfrac{1}{m}\right)$ 上单调递减.

当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，且 $f(2)=2\ln 2-2m-2<0$，

此时函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 上有唯一零点，即函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

③当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-2)(x-2)}{2x}\ge 0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$.

当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

④当 $m>\dfrac{1}{2}$ 时，$0<\dfrac{1}{m}<2$，在 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$ 和 $x\in(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在 $x\in\left(\dfrac{1}{m},2\right)$ 上，$f'(x)$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{m},2\right)$ 上单调递减.

$f\left(\dfrac{1}{m}\right)=2\ln\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2}m\cdot\left(\dfrac{1}{m}\right)^2-(2m+1)\cdot\dfrac{1}{m}=-2\ln m-\dfrac{1}{2m}-2$.

设 $g(m)=-2\ln m-\dfrac{1}{2m}-2\left(m>\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $g'(m)=-\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{2m^2}=\dfrac{1-4m}{2m^2}<0$，

所以 $g(m)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $g(m)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2-3<0$.

又因为当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 唯一零点.

综上所述，得：

当 $m<\ln 2-1$ 时，函数 $f(x)$ 有且仅有 2 个有零点.

当 $\ln 2-1<m\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $m=\ln 2-1$ 或 $m>0$ 时，函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点. ……………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。