2023届4月高三联合测评(福建)·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A\cup B=\{1,3,4,5,6,7\}$，故 $\complement_I(A\cup B)=\{2,8\}$. 故选 C.

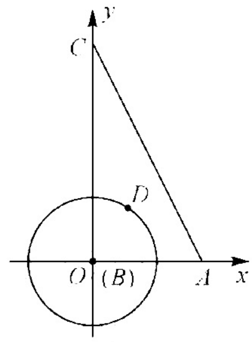
2. A　$z=\frac{a-2i}{2+i}=\frac{(a-2i)(2-i)}{5}=\frac{2a-2}{5}-\frac{a+4}{5}i$，$|z|=2\sqrt{2}\Rightarrow\left(\frac{2a-2}{5}\right)^2+\left(\frac{a+4}{5}\right)^2=8\Rightarrow a=\pm6$，由 z 在复平面上对应的点在第四象限，故舍去 $a=-6$. ∴$a=6$. 故选 A.

3. C　设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $10a_1+45d+a_1+21d=11\Rightarrow a_1+6d=1$，$S_{13}=13a_1+\frac{13\times12}{2}d=13(a_1+6d)=13$. 故选 C.

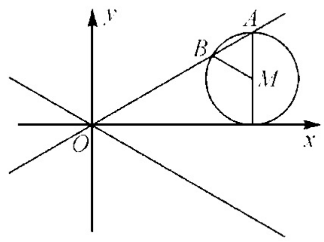
4. D　$\forall x\in[1,5]$，$x^2-4x+a-2>0\Rightarrow a>-x^2+4x+2$，得 $a>6$. A 是 p 的必要不充分条件，B 是 p 的必要不充分条件，C：$2^a>64\Leftrightarrow a>6$ 是 p 的充要条件，D：$\log_2 a>3\Leftrightarrow a>8$ 是 p 的充分不必要条件. 故选 D.

5. A　因为 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 的图象关于原点对称，排除 B，D，又 $f'(x)=e^x-e^{-x}+\frac{1}{x^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上都为增函数. 故选 A.

6. B　以 B 为原点，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 方向分别为 x 轴，y 轴的正方向建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(4,0)$，$C(0,8)$，设 $D(x,y)$，则 $x^2+y^2=5$，$\overrightarrow{AD}=(x-4,y)$，$\overrightarrow{CD}=(x,y-8)$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=x^2+y^2-4x-8y=(x-2)^2+(y-4)^2-20$，$D(x,y)$ 与 $(2,4)$ 的距离为 $d=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$，d 的最大值为 $\sqrt{5}+\sqrt{2^2+4^2}=3\sqrt{5}$，∴$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为 $45-20=25$. 故选 B.



7. B　(a,b) 满足 ⊙M，又满足 $y=\frac{b}{a}x$，故 $A(a,b)$，$AM\parallel y$ 轴，$\angle MAB=60^\circ$，可得 $\angle AOx=30^\circ$，∴$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



8. C　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+n}{(n+1)a_n}\Rightarrow\frac{n+1}{a_{n+1}}=1+\frac{n}{a_n}$，∴$\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 是等差数列，$\frac{n}{a_n}=\frac{1}{a_1}+n-1=n+2\Rightarrow$ $a_n=\frac{n}{n+2}$，故对 $n\geqslant2$，$a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-2}=\frac{2}{(n+1)(n-2)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)$，$a_1=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times3}$ 也符合上式，$a_1+a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1-\frac{2}{n+2}<1$，故 m 可取 1，$\forall m<1$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>\frac{2m}{1-m}\to1-\frac{2}{n-2}>m$，故 m 的最小值为 1. 故选 C.

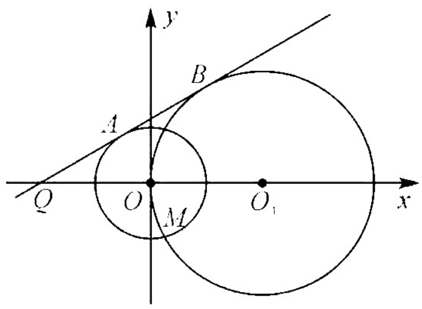
9. AC　A：$b\geqslant\frac{4}{b}\Rightarrow b^2\geqslant4\Rightarrow b\geqslant2$，故 A 正确；

B：$b=2$，$a=1$ 显然满足条件，故 B 错误；

C：$2a\geqslant\frac{4}{b}\Rightarrow ab\geqslant2$，故 C 正确；

D：$a^2+b^2\geq b^2+b-1$，由于 $f(b)=b^2+b-1$ 在 $(2,+\infty)$ 上为增函数，故最小值为5，D错误．故选AC.

10. AD　当 $r=2$ 时，两圆公切线分别与⊙O，⊙O_1 切于点 A，B，交 x 轴于点 Q，$\frac{|OQ|}{|O_1Q|}=\frac{1}{2}\Rightarrow|OQ|=2$，故 $Q(-2,0)$，故A正确；



当 $r=2$ 时，两圆相交弦直线方程为 $x=\frac{1}{4}$，交弦长为 $2\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，故B错误；

若 $MO\perp MO_1$，则 $1^2+r^2=4\Rightarrow r=\sqrt{3}$，故C错误；

当 $r>3$ 时，$r-1>2=|OO_1|$，故两圆关系是内含，D正确．故选AD.

11. BCD　A：当 $n=2$ 时，一组数据 1，2，4，17，$M=6$，不在 2，4 之间，故A错误；

B：由中位数定义知：B正确；

C：$f(x)=\sum_{i=1}^{2n}(x-a_i)^2=2nx^2-4nMx+\sum_{i=1}^{2n}a_i^2$，当 $x=M$ 时，$f(x)$ 取最小值为 $f(M)=2ns^2$，C正确；

D：若 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 成等差数列，则 $M=\frac{\frac{a_1+a_{2n}}{2}\cdot 2n}{2n}=\frac{a_1+a_{2n}}{2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=N$，故D正确．故选BCD.

12. BCD　A：$f'(x)=x+2-2\ln x-2-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，$f''(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq0$，故在 $(0,1)$ 上，$f'(x)<f'(1)=0$，$f(x)$ 为减函数，A错误；

在 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>f'(1)=0$，故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=\frac{5}{2}$，B正确；

C：由B选项可知，过原点且与曲线 $y=f(x)$ 的图象相切为临界点，设切点为 $P(m,f(m))$，点 P 处的切线方程为 $y-\left[\frac{m^2}{2}+2m-(2m+1)\ln m\right]=\left(m-\frac{1}{m}-2\ln m\right)(x-m)$，代入原点坐标化简可得 $\frac{m^2}{2}-2m-1-\ln m=0$，令 $g(x)=\frac{x^2}{2}-2x-1+\ln x$，有 $g'(x)=x-2+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq0$，可得函数 $g(x)$ 单调递增，记方程 $\frac{m^2}{2}-2m-1-\ln m=0$ 的根为 x_0，又由 $g(4)=\ln 4-1>\ln e-1=0$，可知 $4>x_0$，令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，有 $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\geq0$，可得函数 $h(x)$ 单调递增，有 $h(x_0)<h(4)=4-\frac{1}{4}-2\ln 4=\frac{15}{4}-2\ln 4<\frac{15}{4}-2=\frac{7}{4}<2$，由图象得函数 $y=f(x)-2x$ 有且仅有两个零点，故C正确；

D：对函数 $h(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$，有 $h'(x)=f'(x)+f'(2-x)$，$h''(x)=f''(x)-f''(2-x)$，$f'''(x)=\frac{2(x-1)}{x^3}<0$，故 $f''(x)$ 为减函数，由 $0<x<1\Rightarrow x<2-x$，故 $f''(x)>f''(2-x)\Rightarrow h''(x)>0\Rightarrow h'(x)$ 为增函数，故 $h'(x)<h'(1)=0\Rightarrow h(x)$ 为减函数 $\Rightarrow h(x)>h(1)=0$，即 $f(x)>f(2-x)$，x

$f(2-x_2)\to f(x_2)>f(2-x_2)$. 又 $x_2, 2-x_2\in(1,+\infty)$ 为 $f(x)$ 的增区间. ∴ $x_2>2-x_1\to x_1+x_2>2$. 故 D 正确. 故选 BCD.

13. $\frac{3}{5}$ 所求概率为 $\frac{3A_2^2}{A_3^3}=\frac{3}{5}$.

14. $\frac{39\pi}{20}$ $\tan\theta=\frac{\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}{-\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}=-\frac{1+\tan\frac{4\pi}{5}}{1-\tan\frac{4\pi}{5}}=-\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{4\pi}{5}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{4\pi}{5}}=-\tan\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{21\pi}{20}=$

$\tan\frac{19\pi}{20}$, 故 $\theta=\frac{19\pi}{20}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $-\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}>0$, $\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}=\sqrt{2}\sin\frac{21\pi}{20}<0$, 故 θ 在第四象限, $\theta=$

$\frac{19\pi}{20}+\pi=\frac{39\pi}{20}$.

15. $(0,e)$ 或 $(0,e]$ $g(x)=\ln(f(x))=\frac{1}{x}\ln x$, 由复合函数单调性知: $g(x)$ 的增区间即为所求, $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$>0\Rightarrow0<x<e$.

16. $\frac{11}{2}\pi$ $\triangle GEF$ 中心为 O_1, 底面正六边形中心为 O_2, 球心在 O_1O_2 上, 正三角形 GEF 外接圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 底面正六边形外接圆半径为 1, 原正四面体高为 $\sqrt{6}$, 故 $O_1O_2=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, ∴ $\sqrt{R^2-1}+\sqrt{R^2-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 解得 $R^2=\frac{11}{8}$, 故 $S_{球O}=4\pi R^2=\frac{11}{2}\pi$.

17. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d, 由 $b_1b_3=b_2^2\Rightarrow1\cdot(2+2d)=(1+d)^2\Rightarrow d=\pm1$.

当 $d=-1$ 时, $a_2=b_2=0$ 不符合题意, 舍去, 故 $d=1$, $a_n=n$, $b_n=2^{n-1}$; …………………………………… 5 分

(2) $c_n=\frac{n+2}{n(n+1)2^n}=\frac{(2n+2)-n}{n(n+1)2^n}=\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^n}$. ………………………………………………… 7 分

$c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{1\cdot2^0}-\frac{1}{2\cdot2^1}+\frac{1}{2\cdot2^1}-\frac{1}{3\cdot2^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^n}=1-\frac{1}{(n+1)\cdot2^n}$. …… 8 分

由 $c_1+c_2+\cdots+c_n>\frac{2022}{2023}\to(n+1)\cdot2^n>2023$.

当 $n=7$ 时, $8\times2^7=1024<2023$,

当 $n=8$ 时, $9\times2^8=2304>2023$, 故 n 的最小值为 8. ……………………………………………………… 10 分

18. (1) 证明: $\tan A\tan B+\tan A\tan C=3\tan B\tan C\to\frac{\sin A}{\cos A}\left(\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)=3\cdot\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$. ………… 2 分

则 $\sin(B+C)\sin A=3\sin B\sin C\cos A$, ………………………………………………………………… 3 分

而 $\sin(B+C)=\sin A$,

故 $\sin^2A=3\sin B\sin C\cos A$. ………………………………………………………………………… 4 分

故 $a^2=3bc\cos A=\frac{3}{2}(b^2+c^2-a^2)$. ………………………………………………………… 5 分

故 $3b^2+3c^2=5a^2$；…………………………………………………………………………………… 6分

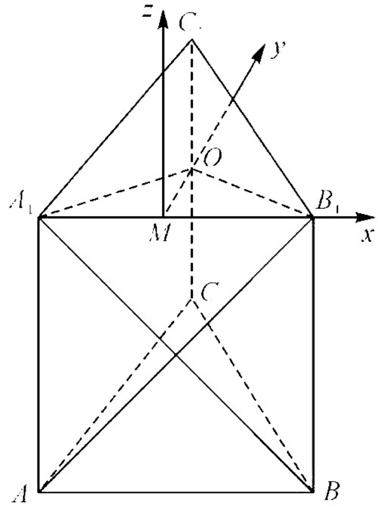
(2)解：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-\frac{3}{5}(b^2+c^2)}{2bc}=\frac{1}{5}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant\frac{2}{5}$，………………………………… 8分

当且仅当 $b=c$ 时，$\angle A$ 取最大值，此时，$6b^2=5a^2$ 且 $6b^2=5a^2=75$，则 $b^2=\frac{25}{2}$，$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，

……………………………………………………………………………………………………… 11分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot b^2\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{5\sqrt{21}}{4}$. ………………………………………………… 12分

19.(1)证明：不妨设 $AB=2$，取 CC_1 的中点为 O.



则 $\angle A_1C_1O=60^\circ$，$A_1C_1=2$，$C_1O=1\Rightarrow A_1O\perp CC_1$，同理 $B_1O\perp CC_1$，…… 2分

则 $CC_1\perp$ 平面 $A_1OB_1\Rightarrow CC_1\perp A_1B_1\Rightarrow$ 四边形 ABB_1A_1 为正方形，$A_1B\perp AB_1$.

……………………………………………………………………………… 4分

且 $A_1B=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=2$，易求得 $BC_1=2\sqrt{3}$，

在 $\triangle A_1BC_1$ 中，由勾股定理可得 $\angle BA_1C_1=90^\circ$，

故 $A_1B\perp A_1C_1\Rightarrow A_1B\perp AC$ 与 $A_1B\perp AB_1$，可得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C；…… 6分

(2)解：取 A_1B_1 的中点 M，连接 OM，过 M 作 OC_1 的平行线 l，由(1)知：MB_1，MO，l 两两垂直，以 M 为原点，$\overrightarrow{MB_1}$、$\overrightarrow{MO}$、l 方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $M-xyz$.

由 $A_1M=B_1M=1$，$OM=\sqrt{2}$，得 $A_1(-1,0,0)$，$B(1,0,-2)$，$O(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,\sqrt{2},1)$. ……………………… 9分

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{A_1O}=(1,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$，有 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1O}\cdot\boldsymbol{m}=x+\sqrt{2}y=0,\\ \overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{m}=z=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{2}$，$y=-1$，$z=0$，有 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},-1,0)$，

又 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，…………………………………………………………………………………… 11分

故所求线面角的正弦值为 $\left|\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{2\sqrt{2}-0-0}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12分

20. 解：(1)以“工龄长工人”得“高节约奖”的频率估计概率，每个“工龄长工人”得“高节约奖”的概率为 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$，

……………………………………………………………………………………………………… 1分

5人中，恰有3人得“高节约奖”概率为 $C_5^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$. ………………………………………… 2分

恰有4人得“高节约奖”概率为 $C_5^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{243}$. ………………………………………………… 3分

5人都得“高节约奖”概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$. ……………………………………………………… 4分

所求概率为$\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{17}{81}$；…………………………………………………………… 6 分

(2)列出列联表如下：

	“高节约奖”	“低节约奖”	合计
“工龄长工人”	20	40	60
“工龄短工人”	10	70	80
合计	30	110	140

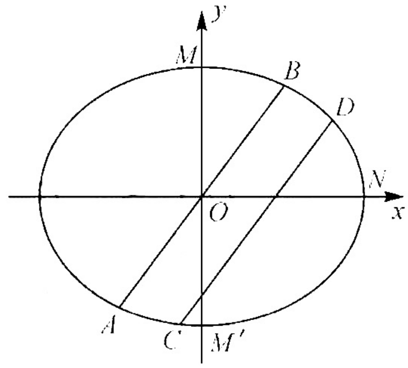
…………………………………………………………………………………………………… 8 分

零假设 H_0：得“高节约奖”是否与工人工作满 15 年有关，

$\chi^2=\frac{140\times(20\times70-40\times10)^2}{30\times110\times80\times60}\approx8.838>7.879$，…………………………………………… 11 分

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，得“高节约奖”与工人工作满 15 年有关. ……………………… 12 分

21. (1)证明：由题意得 $b=2$，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=2\sqrt{3}$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………… 1 分



取椭圆下顶点为 $M'(0,-2)$，设 $A(x_0,y_0)$，

则 $k_{MA}k_{M'A}=\frac{y_0-2}{x_0}\cdot\frac{y_0+2}{x_0}=\frac{y_0^2-4}{x_0^2}$. ………………………………… 2 分

而$\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{4}=1\Rightarrow\frac{y_0^2-4}{x_0^2}=-\frac{1}{3}=k_{MA}k_{MB}$，故 $k_{M'A}=k_{MB}$.

∴$AM'\parallel MB$，由椭圆关于原点中心对称可知：A，B 关于原点对称； … 5 分

(2)解：设直线 CD 的方程为 $y=kx+m$，设 C，D 两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$消去 y 后整理为$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-12=0$，

有 $x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{3k^2+1}$，………………………………………………………… 7 分

又由 $k_{MC}+k_{MD}=1$，有$\frac{y_1-2}{x_1}+\frac{y_2-2}{x_2}=1$，有$\frac{kx_1+m-2}{x_1}+\frac{kx_2+m-2}{x_2}=1$，可得 $2k+(m-2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=1$，

有 $2k+\frac{(m-2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=1$，有 $2k+(m-2)\times\left(-\frac{6km}{3m^2-12}\right)=1$，可得 $m=4k-2$.

又由 $\Delta=36k^2m^2-4(3k^2+1)(3m^2-12)>0$，可得 $0<k<4$，……………………………………………… 9 分

由点 M 不在直线 CD 上，可得 $k\neq1$，故 k 的取值范围为$(0,1)\cup(1,4)$. ……………………… 10 分

AB，CD 之间的距离，即原点 O 到 CD 的距离：$d=\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\Rightarrow d^2=\frac{4(4k^2-4k+1)}{k^2+1}=f(k)$，

$f'(k)=\dfrac{8(2k-1)(k+2)}{(k^2-1)^2}$，∵$0<k<4$ 且 $k\neq1$，∴$d^2\in\left(0,\dfrac{196}{17}\right)$．

即所求范围为$\left(0,\dfrac{14\sqrt{17}}{17}\right)$． …………………………………………………………………… 12 分

22．解：(1)$f'(x)=\dfrac{e^x(x-e)-e^x}{(x-e)^2}=\dfrac{e^x(x-e-1)}{(x-e)^2}$，………………………………………………………… 1 分

故在$(-\infty,e)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；在$(e,e+1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

在$(e+1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数． ………………………………………………………… 2 分

当 $x=e+1$ 时，$f(x)$有极小值为 e^{e+1}； …………………………………………………………………… 4 分

(2)对 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2\geqslant0$，

则$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$． …………………………………………………………………… 6 分

故取 $c=\sqrt{2x+1-2e}$，$d=\sqrt{2\ln x-1}$．

则$(a^2+b^2)(2x+1-2e+2\ln x-1)\geqslant(a\sqrt{2x+1-2e}+b\sqrt{2\ln x-1})^2$． …………………………… 7 分

设 x_0 为 $g(x)$零点，则$\sqrt{x_0}e^{\frac{x_0}{2}}=a\sqrt{2x_0+1-2e}+b\sqrt{2\ln x_0-1}$， ………………………………… 8 分

则$(a^2+b^2)(2x_0+2\ln x_0-2e)\geqslant(\sqrt{x_0}e^{\frac{x_0}{2}})^2=e^{x_0+\ln x_0}$，∴$a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{x_0+\ln x_0}}{x_0+\ln x_0-e}$． ……………… 10 分

令 $t=x_0+\ln x_0$，由定义域 $x_0\in\left[e-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow t\in\left[e-\dfrac{1}{2}+\ln\left(e-\dfrac{1}{2}\right),+\infty\right)$．

设 $h(t)=\dfrac{e^t}{t-e}$，由(1)知：仅当 $t=e+1$ 时，$h(t)$取最小值为 e^{e+1}．

∴a^2+b^2 的最小值为$\dfrac{1}{2}e^{e+1}$，仅当 $x_0=e$，$a^2=b^2=\dfrac{1}{4}e^{e+1}$时成立． ……………………………… 12 分