

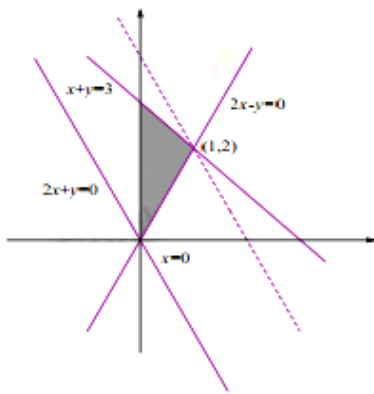
2016年北京高考数学（理科）答案与解析

1. C

【解析】集合 $A = \{x | -2 < x < 2\}$ ，集合 $B = \{x | -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

2. C

【解析】可行域如图阴影部分，目标函数平移到虚线处取得最大值，对应的点为 $(1, 2)$ ，最大值为 $2 \times 1 + 2 = 4$.



3. B

【解析】开始 $a = 1$ ， $k = 0$ ；第一次循环 $a = -\frac{1}{2}$ ， $k = 1$ ；第二次循环 $a = -2$ ， $k = 2$ ，第三次循环 $a = 1$ ，条件判断为“是”跳出，此时 $k = 2$.

4. D

【解析】若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 成立，则以 \vec{a} ， \vec{b} 为边组成平行四边形，那么该平行四边形为菱形， $\vec{a} + \vec{b}$ ，

$\vec{a} - \vec{b}$ 表示的是该菱形的对角线，而菱形的对角线不一定相等，所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 不

一定成立，从而不是充分条件；反之， $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 成立，则以 \vec{a} ， \vec{b} 为边组成平行

四边形，则该平行四边形为矩形，矩形的邻边不一定相等，所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 不一定成立，

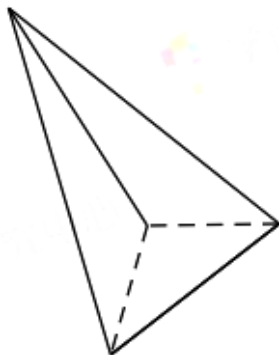
从而不是必要条件.

5. C

【解析】A. 考查的是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 所以 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ 即 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$ 所以 A 错; B. 考查的是三角函数 $y = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调性, 不是单调的, 所以不一定有 $\sin x > \sin y$, B 错; C. 考查的是指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 所以有 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$ 所以 C 对; D 考查的是对数函数 $y = \ln x$ 的性质, $\ln x + \ln y = \ln xy$, 当 $x > y > 0$ 时, $xy > 0$ 不一定有 $\ln xy > 0$, 所以 D 错.

6. A

【解析】通过三视图可还原几何体为如图所示三棱锥, 则通过侧视图得高 $h=1$, 底面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, 所以体积 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{6}$.



7. A

【解析】点 $P\left(\frac{\pi}{4}, t\right)$ 在函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 上, 所以 $t = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 然后 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 s 个单位, 即 $y = \sin\left(2(x+s) - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$, 所以 $s = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

8. B

【解析】取两个球往盒子中放有 4 种情况:

- ①红+红, 则乙盒中红球数加 1 个;
- ②黑+黑, 则丙盒中黑球数加 1 个;
- ③红+黑 (红球放入甲盒中), 则乙盒中黑球数加 1 个;
- ④黑+红 (黑球放入甲盒中), 则丙盒中红球数加 1 个.

因为红球和黑球个数一样, 所以①和②的情况一样多, ③和④的情况完全随机.

③和④对 B 选项中的乙盒中的红球与丙盒中的黑球数没有任何影响.

①和②出现的次数是一样的, 所以对 B 选项中的乙盒中的红球与丙盒中的黑球数的影响次数一样.

综上, 选 B.

9.-1

【解析】 $(1+i)(a+i) = a-1+(a+1)i$

\because 其对应点在实轴上

$$\therefore a+1=0, a=-1$$

10.60

【解析】由二项式定理得含 x^2 的项为 $C_6^2(-2x)^2 = 60x^2$

11.2

【解析】将极坐标转化为直角坐标进行运算 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$

直线的直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$

$$\because \rho = 2 \cos \theta, \rho^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2\rho \cos \theta \therefore x^2 + y^2 = 2x$$

圆的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

圆心 $(1,0)$ 在直线上, 因此 AB 为圆的直径, $|AB| = 2$

12.6

【解析】 $\because a_3 + a_5 = 2a_4 \therefore a_4 = 0$

$$\because a_1 = 6, a_4 = a_1 + 3d \therefore d = -2$$

$$\therefore S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times (6-1)}{2}d = 6$$

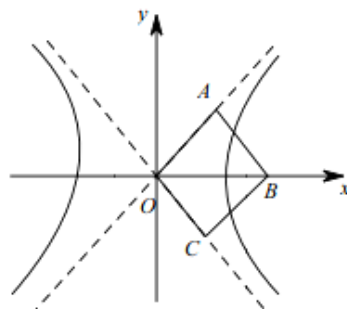
13. 2

【解析】不妨令 B 为双曲线的右焦点, A 在第一象限, 则双曲线图象如图

$$\because OABC \text{ 为正方形, } |OA| = 2 \therefore c = |OB| = 2\sqrt{2}, \angle AOB = \frac{\pi}{4}$$

$$\because \text{直线 } OA \text{ 是渐近线, 方程为 } y = \frac{b}{a}x, \therefore \frac{b}{a} = \tan \angle AOB = 1$$

$$\text{又 } \because a^2 + b^2 = c^2 = 8 \therefore a = 2$$



14. 2, $a < -1$.

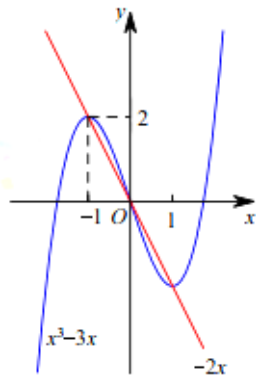
【解析】由 $(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0$, 得 $x = \pm 1$, 如下图, 是 $f(x)$ 的两个函数在没有限制条件时的图象.

(1) $f(x)_{\max} = f(-1) = 2$;

(2) 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 有最大值 $f(-1) = 2$;

当 $a < -1$ 时, $-2x$ 在 $x > a$ 时无最大值, 且 $-2a > (x^3 - 3x)_{\max}$.

所以, $a < -1$.



15.

【解析】(1) $\because a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \angle B = \frac{\pi}{4}$$

(2) $\because A + B + C = \pi$

$$\therefore A + C = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \sqrt{2} \cos A + \cos C$$

$$= \sqrt{2} \cos A + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos A\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin A$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin A = \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\because A + C = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore A \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$$

$$\therefore \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \text{ 最大值为 } 1$$

上式最大值为 1

16.

【解析】(1) $\frac{8}{20} \times 100 = 40$, C 班学生 40 人

(2) 在 A 班中取到每个人的概率相同均为 $\frac{1}{5}$

设 A 班中取到第 i 个人事件为 $A_i, i=1,2,3,4,5$

C 班中取到第 j 个人事件为 $C_j, j=1,2,3,4,5,6,7,8$

A 班中取到 $A_i > C_j$ 的概率为 P_i

所求事件为 D

$$\text{则 } P(D) = \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{5}P_2 + \frac{1}{5}P_3 + \frac{1}{5}P_4 + \frac{1}{5}P_5$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

(3) $\mu_1 < \mu_0$

三组平均数分别为 7, 9, 8.25, 总均值 $\mu_0 = 8.2$

但 μ_1 中多加的三个数据 7, 9, 8.25, 平均值为 8.08, 比 μ_0 小, 故拉低了平均值

17.

【解析】(1) \because 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$

面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$

$\because AB \perp AD, AB \subset$ 面 $ABCD$

$\therefore AB \perp$ 面 PAD

$\because PD \subset$ 面 PAD

$\therefore AB \perp PD$

又 $PD \perp PA$

$\therefore PD \perp$ 面 PAB

(2) 取 AD 中点为 O , 连结 CO, PO

$\because CD = AC = \sqrt{5}$

$\therefore CO \perp AD$

$\because PA = PD$

$\therefore PO \perp AD$

以 O 为原点, 如图建系

易知 $P(0,0,1), B(1,1,0), D(0,-1,0), C(2,0,0)$,

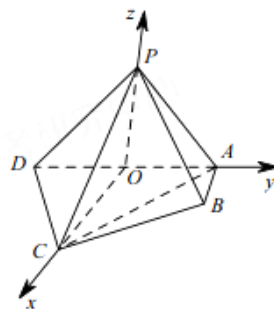
则 $\overrightarrow{PB} = (1,1,-1), \overrightarrow{PD} = (0,-1,-1), \overrightarrow{PC} = (2,0,-1),$

$\overrightarrow{CD} = (-2,-1,0)$

设 \vec{n} 为面 PDC 的法向量, 令 $\vec{n} = (x_0, y_0, 1)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right), \text{ 则 } PB \text{ 与面 } PCD \text{ 夹角 } \theta \text{ 有}$$

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\left| \frac{1}{2} - 1 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(3) 假设存在 M 点使得 $BM \parallel$ 面 PCD

$$\text{设 } \frac{AM}{AP} = \lambda, \quad M(0, y', z')$$

$$\text{由 (2) 知 } A(0, 1, 0), \quad P(0, 0, 1), \quad \overline{AP} = (0, -1, 1), \quad B(1, 1, 0), \quad \overline{AM} = (0, y'-1, z')$$

$$\text{有 } \overline{AM} = \lambda \overline{AP} \Rightarrow M(0, 1-\lambda, \lambda)$$

$$\therefore \overline{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$$

$\because BM \parallel$ 面 PCD , \vec{n} 为 PCD 的法向量

$$\therefore \overline{BM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{即 } -\frac{1}{2} + \lambda + \lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}$$

\therefore 综上, 存在 M 点, 即当 $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$ 时, M 点即为所求.

18.

【解析】 (1) $\because f(x) = xe^{a-x} + bx$

$$\therefore f'(x) = e^{a-x} - xe^{a-x} + b = (1-x)e^{a-x} + b$$

\because 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = (e-1)x + 4$

$$\therefore f(2) = 2(e-1) + 4, \quad f'(2) = e-1$$

$$\text{即 } f(2) = 2e^{a-2} + 2b = 2(e-1) + 4 \quad \text{①}$$

$$f'(2) = (1-2)e^{a-2} + b = e-1 \quad \text{②}$$

由①②解得: $a = 2, \quad b = e$

(II) 由 (1) 可知: $f(x) = xe^{2-x} + ex, \quad f'(x) = (1-x)e^{2-x} + e$

$$\text{令 } g(x) = (1-x)e^{2-x},$$

$$\therefore g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

$$\therefore g(x) \text{ 的最小值是 } g(2) = (1-2)e^{2-2} = -1$$

$$\therefore f'(x) \text{ 的最小值为 } f'(2) = g(2) + e = e-1 > 0$$

即 $f'(x) > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 无减区间.



19.

【解析】(1)由已知, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}ab = 1$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$,

$$\text{解得 } a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2)方法一:

设椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

$$\text{直线 } PA: y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2), \text{ 令 } x = 0, \text{ 得 } y_M = \frac{-2y_0}{x_0 - 2}.$$

$$\therefore |BM| = \left| 1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2} \right|$$

$$\text{直线 } PB: y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1, \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x_N = \frac{-x_0}{y_0 - 1}.$$

$$\therefore |AN| = \left| 2 + \frac{x_0}{y_0 - 1} \right|$$

$$\begin{aligned} |AN| \cdot |BM| &= \left| 2 + \frac{x_0}{y_0 - 1} \right| \cdot \left| 1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2} \right| \\ &= \left| \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{x_0 - 2} \right| \cdot \left| \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{y_0 - 1} \right| \\ &= \left| \frac{x_0^2 + 4y_0^2 + 4x_0y_0 - 4x_0 - 8y_0 + 4}{x_0y_0 - x_0 - 2y_0 + 2} \right| \end{aligned}$$

将 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ 代入上式得 $|AN| \cdot |BM| = 4$

故 $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

方法二:

设椭圆 上一点 $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$,

$$\text{直线 } PA: y = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta - 2}(x - 2), \text{ 令 } x = 0, \text{ 得 } y_M = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}.$$

$$\therefore |BM| = \left| \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{1 - \cos \theta} \right|$$

$$\text{直线 } PB: y = \frac{\sin \theta - 1}{2 \cos \theta}x + 1, \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x_N = \frac{2 \cos \theta}{1 - \sin \theta}.$$

$$\therefore |AN| = \left| \frac{2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2}{1 - \sin \theta} \right|$$

$$\begin{aligned} |AN| \cdot |BM| &= \left| \frac{2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2}{1 - \sin \theta} \right| \cdot \left| \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{1 - \cos \theta} \right| \\ &= 2 \left| \frac{2 - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta \cos \theta} \right| \\ &= 4 \end{aligned}$$

故 $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

20.

【解析】(1) $G(A) = \{2, 5\}$

(2) 因为存在 $a_n > a_1$, 设数列 A 中第一个大于 a_1 的项为 a_k , 则 $a_k > a_1 \geq a_i$, 其中 $2 \leq i \leq k-1$, 所以 $k \in G(A)$, $G(A) \neq \emptyset$.

(3) 设 A 数列的所有“ G 时刻”为 $i_1 < i_2 < \dots < i_k$,

对于第一个“ G 时刻” i_1 , 有 $a_{i_1} > a_1 \geq a_i$, $i = 2, 3, \dots, i_1 - 1$, 则

$$a_{i_1} - a_1 \leq a_{i_1} - a_{i_1-1} \leq 1.$$

对于第二个“ G 时刻” $i_2 (> i_1)$, 有 $a_{i_2} > a_{i_1} \geq a_i$ ($i = 1, 2, \dots, i_2 - 1$).

$$\text{则 } a_{i_2} - a_{i_1} \leq a_{i_2} - a_{i_2-1} \leq 1.$$

类似的 $a_{i_3} - a_{i_2} \leq 1, \dots, a_{i_k} - a_{i_{k-1}} \leq 1$.

于是, $k \geq (a_{i_1} - a_{i_1-1}) + (a_{i_2} - a_{i_2-1}) + \dots + (a_{i_k} - a_{i_k-1}) + (a_{i_k} - a_1) = a_{i_k} - a_1$.

对于 a_N , 若 $N \in G(A)$, 则 $a_k = a_N$;

若 $N \notin G(A)$, 则 $a_N \leq a_k$, 否则由(2), 知 a_k, a_{k+1}, \dots, a_N 中存在“ G 时刻”, 与只有 k 个“ G 时刻”矛盾.

从而, $k \geq a_k - a_1 \geq a_N - a_1$, 证毕.

