长郡中学2021届高三月考试卷(一)

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	D	C	A	B	D	A	D

1. C 【解析】由题意得，$B=\{x|y=\lg(x-1)\}=\{x|x>1\}$，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 2\}$，故选C.

2. D 【解析】$z=\dfrac{25}{3-4i}=\dfrac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=3+4i$，则 $\bar{z}=3-4i$，$\bar{z}$ 在复平面内对应的点是 $(3,-4)$，在第四象限，故选D.

3. C 【解析】$a+b+c=0$ 且 $a<b<c$，则 $a<0$，$c>0$. 所以 $ac<bc$. 故选C.

4. A 【解析】$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$，故选A.

5. B 【解析】函数 $f(x)=x+\log_2 x-m$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

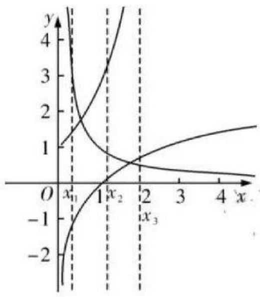
由函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},4\right)$ 上存在零点，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-m<0$，$f(4)=6-m>0$，

解得 $-\frac{1}{2}<m<6$，故“函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},4\right)$ 上存在零点”是“$m\in(1,6)$”的必要不充分条件.

故选B.

6. D 【解析】设 $\lg a=10^b=\frac{1}{c}=t$，$t>0$，则 $a=10^t$，$b=\lg t$，$c=\frac{1}{t}$，

在同一坐标系中分别画出函数 $y=10^x$，$y=\lg x$，$y=\frac{1}{x}$ 的图象，如图，当 $t=x_3$ 时，$a>b>c$；当 $t=x_2$ 时，$a>c>b$；当 $t=x_1$ 时，$c>a>b$. 故选D.



7. A 【解析】由 $\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=7$，有 $\dfrac{3\tan\alpha+1}{2\tan\alpha-3}=7$，解得 $\tan\alpha=2$，

故 $f(x)=\sin^2 x+2\tan\alpha|\cos x|-6=-\cos^2 x+4|\cos x|-5=-(|\cos x|-2)^2-1$，

故当 $|\cos x|=0$ 时，$f(x)$ 取最小值 -5，故选A.

8. D 【解析】$f'(x)=2x-\ln x-1$，$f''(x)=2-\frac{1}{x}$，

$\therefore$ 当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f''(x)\geqslant 0$，

$\therefore f'(x)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore f'(x)\geqslant f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}>0$，

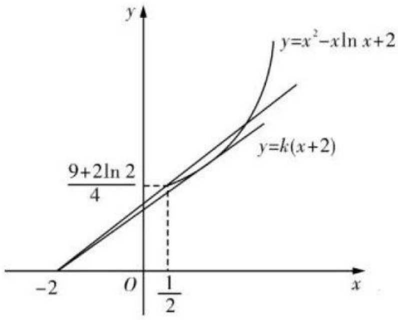
$\therefore f(x)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

$\because [a,b]\subseteq\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$\therefore f(x)$在$[a,b]$上单调递增，

$\because f(x)$在$[a,b]$上的值域为$[k(a+2),k(b+2)]$，$\therefore \begin{cases} f(a)=k(a+2),\\ f(b)=k(b+2),\end{cases}$

$\therefore$方程 $f(x)=k(x+2)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上有两解 a,b.

作出 $y=f(x)$与直线 $y=k(x+2)$的函数图象，则两图象有两交点.



若直线 $y=k(x+2)$过点$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)$，

则 $k=\frac{9+2\ln 2}{10}$，

若直线 $y=k(x+2)$与 $y=f(x)$的图象相切，设切点为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases} y_0=k(x_0+2),\\ y_0=x_0^2-x_0\ln x_0+2,\\ 2x_0-\ln x_0-1=k,\end{cases}$解得 $x_0=1,k=1$.

$\therefore 1<k\leqslant\frac{9+2\ln 2}{10}$，故选 D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	BD	AC	ACD	ABD

9. BD 【解析】对于 A，当 $x>0$ 时，$\frac{2^x}{3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$，$2^x<3^x$ 恒成立，A 错误；

对于 B，$\frac{\log_2 x}{\log_3 x}=\frac{\lg x}{\lg 2}\times\frac{\lg 3}{\lg x}=\frac{\lg 3}{\lg 2}>1$，$\log_2 x<\log_3 x$，B 正确；

对于 C，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}x=1$，则 $\log_{\frac{1}{2}}x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$，C 错误；

对于 D，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$\log_{\frac{1}{3}}x=1$，由对数函数与指数函数的性质可知，当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1<\log_{\frac{1}{3}}x$ 恒成立，D 正确.

故选 BD.

10. AC 【解析】由 $2S_n-S_{n-1}=2p(n\geqslant 2)$，得 $a_2=\frac{p}{2}$.

$n\geqslant 3$ 时，$2S_{n-1}-S_{n-2}=2p$，相减可得 $2a_n-a_{n-1}=0$，

又 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 为首项为 p，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，故 A 正确；

由 A 可得 $p=1$ 时，$S_4=\frac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{15}{8}$，故 B 错误；

由 A 可得 $a_m\cdot a_n=a_{m+n}$，等价为 $p^2\cdot\frac{1}{2^{m+n-2}}=p\cdot\frac{1}{2^{m+n-1}}$，可得 $p=\frac{1}{2}$，故 C 正确；

$|a_3|+|a_8|=|p|\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^7}\right)=|p|\cdot\frac{33}{128}$，$|a_5|+|a_6|=|p|\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\right)=|p|\cdot\frac{12}{128}$，

则 $|a_3|+|a_8|>|a_5|+|a_6|$，即 D 不正确；

故选 AC.

11. ACD 【解析】函数 $f(x)$ 的值域关于原点对称，

对 A，函数 $f(x)=x-1$ 的值域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，符合题意，

对 B，函数 $y=x^4$ 的值域为 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，不符合题意；

对 C，函数 $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 的值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，符合题意；

对 D，函数 $f(x)=\ln(2x-1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，符合题意；

故选 ACD.

12. ABD 【解析】由已知，$A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，因此 $T=\pi$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，过点 $\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$，

因此 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<|\varphi|<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

对 A，$y=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin 2x$，图象关于原点对称，故 A 正确；

对 B，当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=0$，故 B 正确；

对 C，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，有 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 不正确；

对 D，当 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{23\pi}{12}$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in[0,4\pi]$，所以 $y=1$ 与函数 $y=f(x)$ 有 4 个交点，令横坐标为 x_1,x_2,x_3,x_4，$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{\pi}{6}\times 2+\frac{7\pi}{6}\times 2=\frac{8\pi}{3}$，故 D 正确.

故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由已知 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|^2$，

则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，故 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

故答案为$\frac{\pi}{4}$.

14. $\frac{9}{4}$ 【解析】$\because \log_2(a+4b)=2\log_2(2\sqrt{ab})=\log_2(4ab)$,

$\therefore a+4b=4ab$，且$a>0,b>0$,

$\therefore \frac{1}{b}+\frac{4}{a}=4$,

则 $a+b=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{4}{a}\right)(a+b)=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+5\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+5\right)=\frac{9}{4}$,

当且仅当$\begin{cases}a=2b,\\a+4b=4ab,\end{cases}$即$\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b=\frac{3}{4}\end{cases}$时取等号，

则 $a+b$ 的最小值是$\frac{9}{4}$.

15. $16\sqrt{2}+16-\frac{\pi}{2}$ 【解析】由图可知，正八边形分割成8个全等的等腰三角形，顶角为$\frac{360°}{8}=45°$,

设等腰三角形的腰长为a,

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin\frac{135°}{2}}=\frac{8}{\sin 45°}$，解得$a=8\sqrt{2}\sin\frac{135°}{2}$,

所以三角形的面积$S=\frac{1}{2}\left(8\sqrt{2}\sin\frac{135°}{2}\right)^2\sin 45°=32\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 135°}{2}=16(\sqrt{2}+1)$,

则每块八卦田的面积为$16(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{8}\times\pi\times 2^2=16\sqrt{2}+16-\frac{\pi}{2}(\mathrm{m}^2)$.

16. 1176 【解析】由$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则

$a_2=1+a_1, a_3=3-a_2=2-a_1, a_4=5+a_3=7-a_1$,

$a_5=7-a_4=a_1, a_6=9+a_5=9+a_1, a_7=11-a_6=2-a_1, a_8=13+a_7=15-a_1,\cdots$

可知相邻奇数项的和为2，偶数项中，每隔一项构成公差为8的等差数列，由等差数列的求和公式计算即可得到所求值.

因$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)+\cdots+(a_{45}+a_{47})=2\times 12=24$,

$a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{46}+a_{48}=(a_2+a_6+a_{10}+\cdots+a_{46})+(a_4+a_8+\cdots+a_{48})$,

而$a_2+a_6+a_{10}+\cdots+a_{46}=(1+a_1)+(9+a_1)+\cdots+(89+a_1)=540+12a_1$,

$a_4+a_8+\cdots+a_{48}=(7-a_1)+(15-a_1)+\cdots+(95-a_1)=612-12a_1$,

所以数列$\{a_n\}$前48项之和为$24+(540+12a_1)+(612-12a_1)=1176$.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】方案一：选择条件①

(1)由$\begin{cases}b^2+c^2=52,\\b-c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=6,\\c=4,\end{cases}$ ………………………… 1分

A为钝角，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos A=-\frac{1}{4}$, ………………………… 3分

则$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times 6\times 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$,

故$a=8$; ………………………… 5分

(2)$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{64+36-16}{2\times 8\times 6}=\frac{7}{8}$, ………………………… 6分

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，…………………………………… 7 分

$\therefore \cos 2C=2\cos^2 C-1=\frac{17}{32}$，$\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{7\sqrt{15}}{32}$，…………………………………… 8 分

$\therefore \sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2C\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2C\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{7\sqrt{15}}{32}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{17}{32}\times\frac{1}{2}=\frac{21\sqrt{5}-17}{64}$；…………………………………… 10 分

方案二：选择条件②

(1) $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}bc=3\sqrt{15}$，$\therefore bc=24$，…………………………………… 2 分

由 $\begin{cases}bc=24,\\ b-c=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=6,\\ c=4,\end{cases}$ …………………………………… 3 分

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$，

故 $a=8$；…………………………………… 5 分

(2) 同方案一. …………………………………… 10 分

方案三：选择条件③：

(1) A 为钝角，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，…………………………………… 1 分

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=-6$，$bc=24$，

由 $\begin{cases}bc=24,\\ b-c=2,\end{cases}$ 解得 $b=6$，$c=4$，…………………………………… 3 分

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$，

故 $a=8$；…………………………………… 5 分

(2) 同方案一. …………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 因为 $f(x)=e^x+\frac{m}{e^x}$ 是偶函数，则 $f(x)=f(-x)$ 对任意实数 x 恒成立，

即 $e^x+\frac{m}{e^x}=e^{-x}+\frac{m}{e^{-x}}$，…………………………………… 1 分

$(m-1)\left[e^x-\left(\frac{1}{e}\right)^x\right]=0$ 对任意实数 x 恒成立，则 $m=1$；…………………………………… 3 分

(2) $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，…………………………………… 4 分

又因为 $f(x)$ 是偶函数，

$\therefore f(2x)\geqslant f(x+1)\Leftrightarrow f(|2x|)\geqslant f(|x+1|)\Leftrightarrow|2x|\geqslant|x+1|$，…………………………………… 5 分

两边平方可得 $3x^2-2x-1\geqslant0$，解得 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{3}$；

故不等式的解集为 $\left\{x\mid x\geqslant1,\text{或 } x\leqslant-\frac{1}{3}\right\}$；…………………………………… 7 分

(3) $g(x)=\ln[(3-a)e^x+1]-\ln 3a-2x$，问题即为 $\ln[(3-a)e^x+1]\leqslant\ln 3a+2x$ 恒成立，显然 $a>0$，
…………………………………… 8 分

首先 $(3-a)e^x+1>0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 成立，即 $\begin{cases}a<\frac{1}{e^x}+3,\\ a>0\end{cases}$

因为 $x\in[0,+\infty)$，则 $3<\frac{1}{e^x}+3\leqslant 4$，所以 $0<a\leqslant 3$，……………… 9 分

其次，$\ln[(3-a)e^x+1]\leqslant \ln 3a+2x$ 即为 $(3-a)e^x+1\leqslant e^{\ln 3a+2x}$，

即 $3ae^{2x}+(a-3)e^x-1\geqslant 0$ 成立，

亦即 $(3e^x+1)(ae^x-1)\geqslant 0$ 成立，……………… 10 分

因为 $3e^x+1>0$，所以 $ae^x-1\geqslant 0$ 对于任意 $x\in[0,+\infty)$ 成立，

即 $a\geqslant\left(\frac{1}{e^x}\right)_{\max}$，所以 $a\geqslant 1$，

综上，实数 a 的取值范围为 $[1,3]$. ……………… 12 分

19.【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_1=2$，且 a_1,a_2-1,a_3 成等比数列，

$\therefore (d+1)^2=2(2+2d)$，即 $d^2-2d-3=0$，

由已知 $d>0$，$\therefore d=3$，$a_n=3n-1$；……………… 2 分

由 $2S_{n+1}=2S_n+b_n$ 得，$2S_{n+1}-2S_n=2b_{n+1}=b_n$，$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$，

数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，则 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$；……………… 5 分

(2) $c_n=b_n+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$，……………… 6 分

$\therefore T_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right]$

$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{7}{6}-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3(3n+2)}\right]$，……………… 9 分

$\because \left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3(3n+2)}>0$，则 $T_n<\frac{7}{6}$，……………… 10 分

又数列 $\{T_n\}$ 单调递增，则 $T_n\geqslant T_1=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\right)=\frac{3}{5}$，

则 T_n 的取值范围是 $\left[\frac{3}{5},\frac{7}{6}\right)$. ……………… 12 分

20.【解析】(1)由题意可得：

$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，……………… 1 分

因为相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，$\omega=2$，……………… 2 分

因为函数为奇函数，所以 $\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………… 3 分

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，函数为 $f(x)=2\sin 2x$. ……………… 4 分

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$-\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 单调递减，需满足 $-\pi\leqslant 2x\leqslant -\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{4}$，……………… 5 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$. ……………… 6 分

(2)由题意可得：$g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$，……………… 8 分

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$，$\therefore -\frac{2\pi}{3}\leqslant 4x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}$，……………… 9 分

$\therefore -1\leqslant\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………… 11 分

$g(x)\in[-2,\sqrt{3}]$，即函数 $g(x)$ 的值域为 $[-2,\sqrt{3}]$. ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题意得 $r_0=2$，$r_1=1.94$，……………………………………………………………………… 1 分

所以当 $n=1$ 时，$r_1=r_0-(r_0-r_1)\cdot 5^{0.5-p}$，

即 $1.94=2-(2-1.94)\cdot 5^{0.5+p}$，解得 $p=-0.5$，……………………………………………………… 3 分

所以 $r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$，

故改良后所排放的废气中含有的污染物数量的函数模型为 $r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……… 5 分

(2) 由题意可得，$r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}\leqslant 0.08$，

整理得 $5^{0.5n-0.5}\geqslant\dfrac{1.92}{0.06}$，即 $5^{0.5n-0.5}\geqslant 32$，…………………………………………………… 6 分

两边同时取常用对数，得 $0.5n-0.5\geqslant\dfrac{\lg 32}{\lg 5}$，

整理得 $n\geqslant 2\times\dfrac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1$，……………………………………………………………………… 9 分

取 $\lg 2=0.3$ 代入，得 $2\times\dfrac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1=\dfrac{30}{7}+1\approx 5.3$，………………………………………… 11 分

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant 6$.

综上，至少进行 6 次改良工艺后才能使得该企业所排放的废气中含有的污染物数量达标. ………… 12 分

22.【解析】(1) 由已知，$f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{e^x}{x},1\right)\cdot(x,mx+\sin x)=e^x+mx+\sin x$，…………………… 1 分

当 $m=-2$ 时，$f(x)=e^x-2x+\sin x$，$f'(x)=e^x-2+\cos x$，…………………………………………… 2 分

当 $x<0$ 时，$e^x<1$，又 $\cos x\leqslant 1$，

则 $f'(x)=e^x-2+\cos x<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；…………………………………………………………………… 5 分

(2) ①当 $x=0$ 时，$f(x)=1\geqslant 1$，对于 $m\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 1$ 恒成立；………………………………………… 6 分

②当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x+m+\cos x$，设 $g(x)=e^x+m+\cos x$，

则 $g'(x)=e^x-\sin x$，因为 $e^x>1$，又 $\sin x\leqslant 1$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=m+2$，所以 $g(x)>m+2$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(x)>m+2$，…………………………………………………… 7 分

(i) 当 $m\geqslant -2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=1$，所以 $f(x)>1$ 恒成立；……………………………………………………………………… 8 分

(ii) 当 $m<-2$ 时，$f'(0)=m+2<0$，

因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又当 $x=\ln(2-m)$ 时，$f'(x)=e^{\ln(2-m)}+m+\cos x=2+\cos x>0$，

则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，对于 $x\in(0,x_0)$，$f'(x)<0$ 恒成立，…………………………………………… 10 分

故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<f(0)=1$，不合题意. …………………………………………………… 11 分

综上，所求 m 的取值范围为 $[-2,+\infty)$. ……………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》