江西省 东乡一中 都昌一中 丰城中学 赣州中学 景德镇二中 上饶中学 上栗中学 新建二中 新八校

2021届高三第一次联考理科数学试题

考试时间：120分钟　　　　满分：150分

一、选择题（每小题5分，共12小题）

1、设集合 $A=\{y\mid y=\sqrt{4-x^2}\}$ $B=\{y\mid y=2^x,x\in A\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. R　　C. $[1,2]$　　D. $[0,4]$

2、已知 i 为虚数单位，$z=\dfrac{1+i^{2020}}{1-i^{2021}}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A. 1　　B. −1　　C. i　　D. $-i$

3、α,β 为不重合的平面，a,b 为两条直线，下列命题正确的为（　　）

A. 若 $a\subsetneqq\alpha,b\subsetneqq\beta,\alpha/\!/\beta$，则 $a/\!/b$　　B. 若 $a/\!/b,b\subsetneqq\beta$，则 $a/\!/\beta$

C. 若 $\alpha\perp\beta,a\subsetneqq\alpha$，则 $a\perp\beta$　　D. 若 $a\perp\alpha,b\perp\beta,a\perp b$，则 $\alpha\perp\beta$

4. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-3\ge 0\\x+2y-3\ge 0\\2x+2y-5\ge 0\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最小值（　　）

A. 5　　B. $\dfrac{11}{2}$　　C. 7　　D. $\dfrac{13}{2}$

5、若曲线 $y=e^x-m$ 的一条切线为 $y=\dfrac{1}{e}x+n$（e 为自然对数的底数），其中 m,n 为正实数，则 $m+n$ 的值是（　　）

A. e　　B. $\dfrac{1}{e}$　　C. $\dfrac{2}{e}$　　D. $\dfrac{e}{2}$

6、设函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x},x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 是（　　）

A. 奇函数，且存在 x_0 使得 $|f(x_0)|\le 1$　　B. 奇函数，且对任意 $x\ne 0$ 都有 $|f(x)|>1$

C. 偶函数，且存在 x_0 使得 $|f(x_0)|\le 1$　　D. 偶函数，且对任意 $x\ne$

7、设双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作 x 轴的垂线与双曲线的渐近线在第一象限交于点 B，连接 BF_1 交双曲线的左支于 A 点，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为（　）

A. $2+\sqrt{2}+\sqrt{10}$　B. $\sqrt{2}+\sqrt{10}-2$　C. $2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　D. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2$

8、已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=4$，点 O 为其外接圆的圆心. 已知 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}=6$，则角 A 的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{2}$

9、十九世纪下半叶集合论的创立，奠定了现代数学的基础.著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物，具有典型的分形特征，其操作过程如下：将闭区间 $[0,1]$ 均分为三段，去掉中间的区间段 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，记为第一次操作；再将剩下的两个区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$ 分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，记为第二次操作；…，如此这样，每次在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的区间段.操作过程不断地进行下去，以至无穷，剩下的区间集合即是“康托三分集”.若使去掉的各区间长度之和不小于 $\frac{8}{9}$，则需要操作的次数 n 的最小值为（　　）参考数据：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$

A. 4　B. 5　C. 6　D. 7

10、已知抛物线 $y^2=4x$ 上有两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，焦点为 F，则 $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=1$. 是“直线 AB 经过焦点 F”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

11、设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x},x\ge a\\ x,x<a\end{cases}$，若函数存在最大值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\le 1$　B. $a<1$　C. $a\le\frac{1}{e}$　D. $a<\frac{1}{e}$

12、若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1{}^2+a_3{}^2=2$，且 $a_1\ge 1$，求 $\frac{a_2+a_3}{a_1+a_2}$ 的取值范围。（　　）

A. $(-1,1)$　B. $[-1,1]$　C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

二、填空题（每小题5分，共4小题）

13、已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=5$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影为__________.

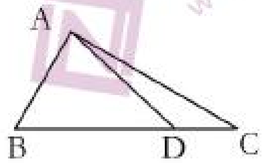
14、$(x^2-2x-1)(\frac{1}{x}+2)^3$的展开式中的常数项是________.

15、已知$D-ABC$是球O的内接三棱锥，$AB=BC=CA=2\sqrt{3},BD=2,DA=4$. 二面角$D-AB-C$为$120^\circ$，则球$O$的半径为________.

16、已知$a>1$，$b\in R$，当$x>0$时，$[(a-1)x-1]\cdot\left(\frac{x^2-4}{2x}-b\right)\geq 0$恒成立，则$b+3a$的最小值是__________.

三、解答题（17–21题每题12分，选做题10分）

17. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，点D在线段BC上.



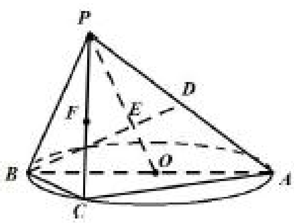
（1）若$\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，求AD的长；

（2）若$BD=3DC$，且$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，求$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$的值.

18、如图，AB是$\odot O$的直径，动点P在$\odot O$所在平面上的射影恰是$\odot O$上的动点C，$PC=AB=2$，D是PA的中点，PO与BD交于点E，F是PC上的一个动点.

（1）若$CO//$平面BEF，求$\frac{PC}{FC}$的值；

（2）若F为PC的中点，$BC=AC$，求直线CD与平面BEF所成角的余弦值.



19、李雷、韩梅梅两人进行象棋比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 4 局时停止. 设李雷在每局中获胜的概率为 $P\left(P>\frac{1}{2}\right)$，且各局胜负相互独立. 已知第二局比赛结束时比赛停止的概率为 $\frac{5}{8}$.

（1）求 p 的值；

（2）设 ξ 表示比赛停止时李雷的总得分，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$

20、已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，上、下顶点分别为 C，D，右焦点为 F，离心率为 $\frac{1}{2}$，其中 $4|FA|=|FB|\cdot|CD|^2$.

（1）求椭圆的标准方程.

（2）过椭圆的左焦点 F' 的直线 l 与椭圆 M 交于 E,H 两点,记 ΔABE 与 ΔABH 的面积分别为 S_1 和 S_2，求 $|S_1-S_2|$ 的最大值.

21、已知函数 $f(x)=x^{-2}\cdot e^x, g(x)=-2\ln x$.

（1）、求函数 $y=f(x)$ 的单调区间。

（2）$h(x)=xf(x)+g(x)$，若 x_0 为 $y=x^2h'(x)$ 极值点，其中 $h'(x)$ 为函数 $h(x)$ 的导函数。

证明：$4-2\ln 2<h(x_0)<9-2\ln 2$。

22、平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t}{1+t}\\ y=\dfrac{2t}{1+t}\end{cases}$（$t$ 为参数，且 $t\neq -1$）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为

$\rho=\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$·

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

23、已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|$.

（1）求 $f(x)\geq -3$ 的解集。

（2）若存在 a,b，关于 x 的不等式 $|b+a|-|2b-a|\geq|a|(|x+1|+|x-2m|)(a\neq 0)$ 有解，求实数 m 的取值范围。

江西省 东乡一中 都昌一中 丰城中学 赣州中学 景德镇二中 上饶中学 上栗中学 新建二中 新八校

2021 届高三第一次联考理科数学试题

考试时间：120 分钟　　　　满分：150 分

一、选择题（每小题 5 分，共 12 小题）

1、设集合 $A=\{y \mid y=\sqrt{4-x^2}\}$ $B=\{y \mid y=2^x, x\in A\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. R　　C. $[1,2]$　　D. $[0,4]$

答案：C　解析：$A=[0,2], B=[1,4], \therefore A\cap B=[1,2]$.

2、已知 i 为虚数单位，$z=\dfrac{1+i^{2020}}{1-i^{2021}}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

答案：B　解析：$\because i^{2020}=i^0=1, i^{2021}=i^1=1, \therefore z=\dfrac{2}{1-i}=1+i \therefore \bar{z}=1-i$

3、α,β 为不重合的平面，a,b 为两条直线，下列命题正确的为（　　）

A. 若 $a\subsetneqq\alpha, b\subsetneqq\beta, \alpha // \beta$，则 $a//b$　　B. 若 $a//b, b\subsetneqq\beta$，则 $a//\beta$

C. 若 $\alpha\perp\beta, a\subsetneqq\alpha$，则 $a\perp\beta$　　D. 若 $a\perp\alpha, b\perp\beta, a\perp b$，则 $\alpha\perp\beta$

答案：D 解析：略

4. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-3\ge 0\\ x+2y-3\ge 0\\ 2x+2y-5\ge 0\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最小值（　　）

A. 5　　B. $\dfrac{11}{2}$　　C. 7　　D. $\dfrac{13}{2}$

答案：B 解析：结合可行域，目标函数在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处取到最小值。

5、若曲线 $y=e^x-m$ 的一条切线为 $y=\dfrac{1}{e}x+n$（e 为自然对数的底数），其中 m,n 为正实数，则 $m+n$ 的值是（　　）

A. e　　B. $\frac{1}{e}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $\frac{e}{2}$

答案：C　解析：$y'=e^x$, 设切点坐标为 (x_0,y_0), $\therefore e^{x_0}=\frac{1}{e}, x_0=-1, \therefore \frac{1}{e}-m=-\frac{1}{e}+n$

$\therefore m+n=\frac{2}{e}$

6、设函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}, x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 是（　）

A. 奇函数，且存在 x_0 使得 $|f(x_0)|\le 1$　B. 奇函数，且对任意 $x\neq 0$ 都有 $|f(x)|>1$

C. 偶函数，且存在 x_0 使得 $|f(x_0)|\le 1$　D. 偶函数，且对任意 $x\neq 0$ 都有 $|f(x)|>1$

答案：D　解析：显然函数为偶函数，又 $\because$ 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\tan x\ge x, \therefore |f(x)|>x.$

7、设双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作 x 轴的垂线与双曲线的渐近线在第一象限交于点 B，连接 BF_1 交双曲线的左支于 A 点，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为（　）

A. $2+\sqrt{2}+\sqrt{10}$　B. $\sqrt{2}+\sqrt{10}-2$　C. $2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　D. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2$

答案：A　解析：

$\because AB+AF_2+BF_2=AB+2a+AF_1+BF_2=BF_1+BF_2+2=\sqrt{10}+\sqrt{2}+2$

8、已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=4$，点 O 为其外接圆的圆心. 已知 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}=6$，则角 A 的最大值为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{2}$

答案：A　解析：取 AB 的中点 D, 则 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(16-a^2)=6, \therefore a=2.$ 又 $\because \cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{c^2+12}{8c}=\frac{1}{8}(c+\frac{12}{c})\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ 当且仅当 $c=2\sqrt{3}$ 时等号成立, $\therefore A\le\frac{\pi}{6}$

9、十九世纪下半叶集合论的创立，奠定了现代数学的基础.著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物，具有典型的分形特征，其操作过程如下：将闭区间 $[0,1]$ 均分为三段，去掉中间的区间段 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，记为第一次操作；再将剩下的两个区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$ 分别均

分为三段，并各自去掉中间的区间段，记为第二次操作；…，如此这样，每次在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的区间段.操作过程不断地进行下去，以至无穷，剩下的区间集合即是“康托三分集”.若使去掉的各区间长度之和不小于$\frac{8}{9}$，则需要操作的次数n的最小值为（　　）参考数据：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

答案：C　解析：记a_n为第n次去掉的长度，容易得出$a_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}$,所以$S_n=1-(\frac{2}{3})^n\geq\frac{8}{9}$,

$$n\geq\frac{2\lg 3}{\lg 3-\lg 2}\approx 0.5481。$$

10、已知抛物线$y^2=4x$上有两点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，焦点为F，则$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=1$.是“直线$AB$经过焦点$F$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

答案：B　解析：设直线AB为$x=my+n$,$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+n\end{cases}$消$x$得方程$y^2-4my-4n=0$,

$\therefore y_1+y_2=4m, y_1\cdot y_2=-4n$当$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=1$时，则$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=1,\therefore x_1\cdot x_2=1$

$\because x_1\cdot x_2=\frac{(y_1\cdot y_2)^2}{16}=n^2=1,\therefore n=\pm1,$显然当直线过焦点时有$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=1$

11、设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x},x\geq a\\x,x<a\end{cases}$,若函数存在最大值，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$a\leq1$　　B．$a<1$　　C．$a\leq\frac{1}{e}$　　D．$a<\frac{1}{e}$

答案：C　解析：由图可知，$a\leq\frac{1}{e}$。

12、若等差数列$\{a_n\}$满足$a_1^{\ 2}+a_3^{\ 2}=2$,且$a_1\geq1$,求$\frac{a_2+a_3}{a_1+a_2}$的取值范围。（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$[-1,1]$　　C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

答案：B　解析：$\begin{cases}a_1=\sqrt{2}\cos\theta\\a_3=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\theta\in[-\pi,\pi)$又$\because a_1\ge1\therefore\sqrt{2}\cos\theta\ge1\therefore\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

$\therefore a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\therefore\frac{a_2+a_3}{a_1+a_2}=\frac{3\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+3\cos\theta}=\frac{3\tan\theta+1}{\tan\theta+3}=3-\frac{8}{\tan\theta+3}$

又$\because\tan\theta\in[-1,1],\therefore\frac{a_2+a_3}{a_1+a_2}\in[-1,1]$。

二、填空题（每小题 5 分，共 4 小题）

13、已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=5$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影为____________.

解析：

$\because|\vec{a}+\vec{b}|=4\therefore\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=16,|\vec{a}-\vec{b}|=4\therefore\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=25$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{9}{4}$,则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{3}{4}$

14、$(x^2-2x-1)(\frac{1}{x}+2)^3$的展开式中的常数项是________.

解析：$x^2\cdot C_3^1(\frac{1}{x})^2 2^1+(-2x)\cdot C_3^2(\frac{1}{x})^1\cdot2^2+(-1)\cdot2^3=-26$。

15、已知$D-ABC$是球O的内接三棱锥，$AB=BC=CA=2\sqrt{3},BD=2,DA=4$.二面角$D-AB-C$为$120^\circ$,则球$O$的半径为________.

解析：取AB的中点E，找出Δ_{ABC}的外心O_1和Δ_{DAB}的外心O_2，由题意可知

$O_1E=O_2E=1$,且$\angle O_1EO_2=120^\circ$，过O_1，O_2分别作面ABC和面DAB的垂线交于点O,

则O为外接球的球心，所以$R^2=OE^2+EA^2=4+3=7$，$R=\sqrt{7}$

16、已知$a>1$，$b\in R$，当$x>0$时，$[(a-1)x-1]\cdot\left(\frac{x^2-4}{2x}-b\right)\ge0$恒成立，则$b+3a$的最小值是____________.

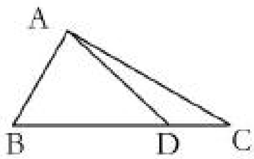
解析：当$x\in\left(0,\frac{1}{a-1}\right],b\ge\frac{x^2-4}{2x}$恒成立,$\therefore b\ge\frac{1}{2}[\frac{1}{a-1}-4(a-1)]$.

当$x\in\left[\frac{1}{a-1},+\infty\right),b\le\frac{x^2-4}{2x}$恒成立,$\therefore b\le\frac{1}{2}[\frac{1}{a-1}-4(a-1)]$

$\therefore b=\frac{1}{2}[\frac{1}{a-1}-4(a-1)].\therefore b+3a=\frac{1}{2(a-1)}+(a-1)+3\geq\sqrt{2}+3$，当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$时等号成立。

三、解答题（17–21 题每题 12 分，选做题 10 分）

17. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，点D在线段BC上.



（1）若$\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，求AD的长;

（2）若$BD=3DC$，且$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，求$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$的值.

解析：解：（1）$\because\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}\therefore\frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\therefore AD=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$. ……6 分

(2) $\because S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}\therefore BC=4, BD=3, DC=1$,

在$\triangle ABD$中，$\frac{3}{\sin\angle BAD}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，在$\triangle ADC$中，$\frac{1}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$

$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{3AC}{2}$……………………………………………………8 分

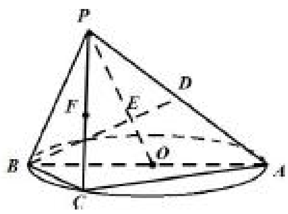
$\because AC^2=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12\therefore AC=2\sqrt{3}$……………………………10 分

$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=3\sqrt{3}$……………………………………………………12 分

18、如图，AB是$\odot O$的直径，动点P在$\odot O$所在平面上的射影恰是$\odot O$上的动点C，$PC=AB=2$，D是PA的中点，PO与BD交于点E，F是PC上的一个动点.

（1）若$CO//$平面BEF，求$\frac{PC}{FC}$的值;

（2）若F为PC的中点，$BC=AC$，求直线CD与平面BEF所成角的余弦值.

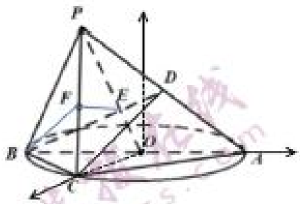


解析：解：（1）因为$CO//$平面BEF，所以$EF//OC$，

所以$\frac{PC}{FC}=\frac{PO}{PE}$. 因为$D$，$O$分别为$PA, AB$的中点，

所以点E为$\triangle PAB$的重心，所以$\frac{PO}{PE}=\frac{3}{1}$，即$\frac{PC}{FC}=\frac{3}{1}$………

（2）如图所示建立空间直角坐标系。



$\therefore C(1,0,0),P(1,0,2),A(0,1,0),O(0,0,0),B(0,-1,0)$。

$\because F(1,0,1),E(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}),D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$。

$\therefore \overrightarrow{CD}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),\overrightarrow{EF}=(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}),\overrightarrow{BE}=(\frac{1}{3},1,\frac{2}{3})$……………………8 分

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\therefore\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}z=0\\ \frac{1}{3}x+y+\frac{2}{3}z=0\end{cases}$ 令 $x=1$，$\therefore \vec{n}=(1,1,-2)$……………… 10 分

$\cos\langle\overrightarrow{CD},\vec{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\frac{1}{2}\times1+(-\frac{1}{2})\times1+(-1)\times(-2)}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}=\frac{2}{3}$……………… 11 分

直线 CD 与平面 BEF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$。……………………………… 12 分

19、李雷、韩梅梅两人进行象棋比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 4 局时停止. 设李雷在每局中获胜的概率为 $P\left(P>\frac{1}{2}\right)$，且各局胜负相互独立. 已知第二局比赛结束时比赛停止的概率为 $\frac{5}{8}$.

（1）求 P 的值；

（2）设 ξ 表示比赛停止时李雷的总得分，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$

试题解析：（1）依题意，当李雷连胜 2 局或韩梅梅连胜 2 局时，第二局比赛结束时比赛结束，

$\therefore$ 有 $p^2+(1-p)^2=\frac{5}{8}$， 解得 $p=\frac{3}{4}$ 或 $p=\frac{1}{4}$ $\because p>\frac{1}{2}$ $\therefore p=\frac{3}{4}$ ……………5 分

（2）依题意知，ξ 的所有可能值为 0,1,2,3 ， ……………………………………………………6 分

$\therefore P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$……………………………………………… 7 分

$\therefore P(\xi=1)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{256}$…………………………

$\therefore P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{45}{64}$……………………9 分

，$\therefore P(\xi=3)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{54}{256}$……………………10 分

$\therefore$ 随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{256}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{54}{256}$

故 $E\xi=\frac{6}{256}+2\times\frac{45}{64}+3\times\frac{54}{256}=\frac{33}{16}$。……………………12 分

20、已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，上、下顶点分别为 C，D，右焦点为 F，离心率为 $\frac{1}{2}$，其中 $4|FA|=|FB|\cdot|CD|^2$.

（1）求椭圆的标准方程.

（2）过椭圆的左焦点 F' 的直线 l 与椭圆 M 交于 E,H 两点,记 ΔABE 与 ΔABH 的面积分别为 S_1 和 S_2，求 $|S_1-S_2|$ 的最大值.

试题解析：（1）有条件可知 $4(a+c)=(a-c)(2b)^2$ $\therefore b^2=\frac{a+c}{a-c}=\frac{1+e}{1-e}=3$

$\therefore a^2=4\therefore\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………5 分

（2）当直线 l 无斜率时，直线方程为 $x=-1$，此时 $D(-1,\frac{3}{2})$，$C(-1,-\frac{3}{2})$，$\left|S_1-S_2\right|=0$．…5 分

当直线 l 斜率存在时，设直线方程为 $y=k(x+1)(k\neq0)$，设 $E(x_1,y_1)$，，$H(x_2,y_2)$

联立得 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x+1)\end{cases}$，消掉 y 得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

显然 $\Delta>0$，方程有根，且 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$．……………8 分

此时

$\left|S_1-S_2\right|=2\left|\left|y_2\right|-\left|y_1\right|\right|=2\left|y_2+y_1\right|=2\left|k(x_2+1)+k(x_1+1)\right|=\frac{12|k|}{3+4k^2}$．……………10 分

因为 $k\neq0$，上式 $=\frac{12}{\frac{3}{|k|}+4|k|}\leq\frac{12}{2\sqrt{\frac{3}{|k|}\cdot4|k|}}=\frac{12}{2\sqrt{12}}=\sqrt{3}$，（$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立），

所以 $\left|S_1-S_2\right|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$．……………12 分

21、已知函数 $f(x)=x^{-2}\cdot e^{x}, g(x)=-2\ln x$.

（1）、求函数 $y=f(x)$ 的单调区间。

（2）$h(x)=xf(x)+g(x)$，若 x_0 为 $y=x^2h'(x)$ 极值点，其中 $h'(x)$ 为函数 $h(x)$ 的导函数。

证明：$4-2\ln 2<h(x_0)<9-2\ln 2$。

试题解析：(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，$\because f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$。..................1 分

$\therefore f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，由$f'(x)>0$可得函数的单调增区间为$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$。...3 分

由$f'(x)<0$可得函数的单调减区间$(0,2)$。.................................5 分

(2) $\because h(x)=\dfrac{e^x}{x}-2\ln x \therefore h'(x)=\dfrac{xe^x-e^x-2x}{x^2}$, ...6 分

令$\varphi(x)=x^2h'(x)=xe^x-e^x-2x$

$\varphi'(x)=xe^x-2$显然$\varphi'(x)$为单调增函数

又$\because \varphi'(\frac{1}{2})<0, \varphi'(1)>0$

$\therefore x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 且$x_0e^{x_0}=2$

..........................8 分

令$\varphi(x)=x^2h'(x)=xe^x-e^x-2x$

$\varphi'(x)=xe^x-2$显然$\varphi'(x)$为单调增函数

$\therefore h(x_0)=\dfrac{2}{x_0^{\ 2}}-2(\ln 2-x_0)=\dfrac{2}{x_0^{\ 2}}+2x_0-2\ln 2$

令$\phi(x)=\dfrac{2}{x^2}+2x-2\ln 2 \therefore \phi'(x)=-\dfrac{4}{x^3}+2=\dfrac{2x^3-4}{x^3}<0$

$\therefore \phi(x)$单调递减$\because x_0\in(\frac{1}{2},1) \therefore 4-2\ln 2<h(x_0)<9-2\ln 2$

....................12 分

22、平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$（$t$为参数，且$t\neq -1$）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为

$\rho=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）已知点 A 的极坐标为 $(1,0)$，直线 l：$\theta=\alpha\ (\rho\in\mathbf{R})$ 与 C_1 交于点 B，其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

过点 A 的直线 n 与交 C_2 于 M，N 两点，若 $n\perp l$，且 $\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OB|^2}=16$，求 α 的取值。

试题解析（1）：$\begin{cases}x=-1+\dfrac{2}{t+1}\\ y=2-\dfrac{2}{t+1}\end{cases}\therefore x+y=1(x\neq-1).$

$\therefore\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}(\rho\neq\sqrt{5})$，$\because\rho=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}\therefore y^2=4x$ ………………5 分

（2）：$\because|OB|=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，直线 n 的参数方程可以设为 $\begin{cases}x=1+t\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})\\ y=t\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$

$\begin{cases}x=1-t\sin\alpha\\ y=t\cos\alpha\end{cases}$，代入抛物线方程有 $\cos^2\alpha\cdot t^2+4\sin\alpha\cdot t-4=0$

$\therefore t_1\cdot t_2=-\dfrac{4}{\cos^2\alpha}$，$\therefore\dfrac{|AM|\cdot|AN|}{|OB|^2}=\dfrac{\dfrac{4}{\cos^2\alpha}}{(\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha})^2}=16$

$\therefore\tan\alpha=1,\tan\alpha=-3$(舍去) $\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ …………………………………10 分

23、已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|$.

（1）求 $f(x)\geq-3$ 的解集。

（2）若存在 a,b，关于 x 的不等式 $|b+a|-|2b-a|\geq|a|(|x+1|+|x-2m|)(a\neq0)$ 有解，求实数 m 的取值范围。

试题解析（1）当 $x\leq-1$ 时，$f(x)=x-2\therefore x-2\geq-3,x\geq-1\therefore x=-1.$

当 $-1<x\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x\therefore3x\geq-3,x\geq-1\therefore-1<x\leq\dfrac{1}{2}.$

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-x+2\therefore-x+2\geq-3,x\leq5\therefore\dfrac{1}{2}<x\leq5.$

综上所述：解集为 $\{x|-1\leq x\leq5\}$ ……………………………

(2) $\because \frac{|b+a|}{|a|}-\frac{|2b-a|}{|a|} \geq |x+1|+|x-2m|$

$\therefore |\frac{b}{a}+1|-|2\frac{b}{a}-1| \geq |x+1|+|x-2m|$

$\because \frac{3}{2} \geq |2m+1| \therefore -\frac{5}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$……………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》