

高二年级数学（理）答案 202306

一、选择题 ABCCB DCDBC AD

二、填空题 13. -2 . 14. 3 15. $3x + y - 7 = 0$ 16. -4

三、解答题

17. (1) 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 1$;2 分

(2) 由 $f(1) = 4$, 得 $f(2) = f(1+1) = 4 + 4 + 2 \times 1 \times 1 - 1 = 9$,

$f(3) = f(2+1) = 9 + 4 + 2 \times 2 \times 1 - 1 = 16$, $f(4) = f(3+1) = 16 + 4 + 2 \times 3 \times 1 - 1 = 25$8 分

(3) 猜想: $f(n) = (n+1)^2$ (n 为正整数).

证明: 当 $n = 1$ 时, $f(1) = 4$, 等式成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即 $f(k) = (k+1)^2$, 则当 $n = k+1$ 时,

$f(k+1) = f(k) + f(1) + 2 \times k \times 1 - 1 = (k+1)^2 + 4 + 2k - 1 = k^2 + 4k + 4 = [(k+1) + 1]^2$, 等式也成立.

综上: 对任意正整数 n 都有 $f(n) = (n+1)^2$14 分

18. (1) 函数 $y = f(x)$ 的图象与两坐标轴所围图形, 如图中阴影区域, 设函数 $y = f(x)$ 的图象与两

坐标轴所围成图形的面积 S : $S = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + 1 = \frac{1}{3}$

(2) 由 (1) 知函数 $y = f(x)$ 的图象与两坐标轴所围成图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体,

即是曲线段 $y = x^2 - 2x + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) 与坐标轴所围图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体, 其体积为:

$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

19. (1) 由已知, 完成列联表,

将数值代入公式可得 χ^2 的观测值:

$$\chi^2 = \frac{80k(600k^2 - 200k^2)^2}{50k \times 30k \times 40k \times 40k} = \frac{16k}{3},$$

根据条件, 可得 $3.841 \leq \frac{16k}{3} < 6.635$, 解得

$0.72 \leq k < 1.244$, 因为 $k \in N^*$, 所以 $k = 1$;

(2) 由 (1) 知, 样本的男生中喜欢足球的频率为 $\frac{3}{5}$,

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	$30k$	$20k$	$50k$
女生	$10k$	$20k$	$30k$
合计	$40k$	$40k$	$80k$

用样本估计总体，从全校男生中随机抽取一人，喜欢足球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则 $X \sim B(4, \frac{3}{5})$ ，

$$P(X=0) = C_4^0 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625},$$

$$P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{81}{625},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

$$EX = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}.$$

20. (1) 设 A_1 表示事件“第1天去A餐厅用餐”， B_1 表示事件“第1天去B餐厅用餐”， A_2 表示事件“第2天去A餐厅用餐”，

根据题意得 $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$ ， $P(A_2|A_1) = 0.4$ ， $P(A_2|B_1) = 0.8$ ，

则 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.8 = 0.6$ ，

所以，王同学第2天去A餐厅用餐的概率为0.6.

$$(2) \text{ 由题意, } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

21. (1) 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，

$$\text{则 } f'(x) = \frac{(2x-1)e^x - (x^2-x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+3x-2}{e^x} = \frac{-(x-1)(x-2)}{e^x},$$

由 $f'(x) > 0$ 得 $1 < x < 2$ ，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, 2)$ 。

(2) 不等式 $e^x f(x) \geq a + \ln x$ ，即 $x^2 - x + 1 \geq a + \ln x$ ，即 $a \leq x^2 - x + 1 - \ln x$ 。

所以问题可转化为 $a \leq x^2 - x + 1 - \ln x$ 恒成立。令 $g(x) = x^2 - x + 1 - \ln x$ ($x > 0$)，

$$\text{则 } g'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x},$$

所以当 $x \in (0, 1)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时， $g(x)$ 取得最小值 $g(1) = 1 - 1 + 1 - \ln 1 = 1$ ，

所以 $a \leq 1$ ，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$ 。