重庆市高2023届高三第五次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共8小题．每小题5分，共40分．

1－4 DCCD　　5－8 ADBB

6. D　函数$f(x)$满足$f(x+3)$为偶函数即$y=f(x)$的图像关于$x=3$对称，又因为$f(x)+f(2-x)=2$即$y=f(x)$的图像关于$(1,1)$对称且$f(1)=1$，
故$f(5)=f(1)=1$，A错误；$f(3)$，$f(0)$的函数值未知，故B，C不成立；
因为双对称可知$y=f(x)$的周期为8，故$f(-3)=f(5)=f(1)=1$，D正确．

7. B　由$|PQ|=|F_1F_2|$且PF_1与QF_2垂直可知，四边形PQF_1F_2为菱形，且边长为$2c$，结合原点观察，$\triangle QF_1O$为直角三角形，$QF_1=2c$，$F_1O=c$，故$\angle QF_1O=60°$，则$PF_1=2\sqrt{3}c$，$PF_2=2c$，$PF_1-PF_2=2\sqrt{3}c-2c=2a$，即离心率$e=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，选B．

8. B　由$f'(x_0)=2x_0+\ln x_0+1-a=0$且$g'(x_0)=-2ae^{-2x_0}+2x_0=0$两方程联立消去$a$可得$2x_0+\ln x_0+1=x_0e^{2x_0}=e^{2x_0+\ln x_0}$，设$2x_0+\ln x_0=t$，即$t+1=e^t$，由常用函数不等式可知$e^t\geqslant t+1$恒成立当$t=0$时取等，即$2x_0+\ln x_0=0$且$x_0e^{2x_0}=1$，则$\ln x_0=-2x_0$，$e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以$e^{2x_0}\ln x_0=-2$，选B．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分．

9－12 AC　　BD　　BCD　　ACD

11. BCD　选项A：$PC=5$，半径$r=4$，圆C上有且只有一个点到点P的距离为1，故错误；
选项B：当PQ为圆的切线时，$\tan\angle CPQ$取得最大为$\frac{4}{3}$，故存在点Q使$\tan\angle CPQ=\frac{4}{3}$，正确．
选项C：由向量数量积的几何意义知$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PC}$等于$|\overrightarrow{PC}|$与$\overrightarrow{PQ}$在$\overrightarrow{PC}$方向上投影的乘积，$\overrightarrow{PQ}$在$\overrightarrow{PC}$方向上投影的范围为$[1,9]$，则$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围为$[5,45]$，正确；
选项D：观察可知：当M，N接近重合时$\frac{PM}{PN}$接近1，当M，N经过圆心$\frac{PM}{PN}=9$，所以$\frac{PM}{PN}\in(1,9]$，故$\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{PN}$可以成立，正确．选BCD

12. ACD　由$4a^2-ab+b^2=1$得$b^2-ab+4a^2-1=0$，关于b的方程有解，
所以$\Delta=(-a)^2-4(4a^2-1)\geqslant0\therefore a^2\leqslant\frac{4}{15}\therefore|a|\leqslant\frac{2\sqrt{15}}{15}$，A正确；
取$a=0$，$b=1$便知$|a+b|<1$不成立，B错误；
由$4a^2-ab+b^2=1$得$4a^2+b^2=1+ab=1+\frac{1}{2}\cdot2ab$，依据均值不等式得$-\frac{4a^2+b^2}{2}\leqslant2ab\leqslant\frac{4a^2+b^2}{2}$
所以令$4a^2+b^2=t$，则有$1-\frac{t}{4}\leqslant t\leqslant1+\frac{t}{4}\therefore\frac{4}{5}\leqslant t\leqslant\frac{4}{3}$，故$\frac{4}{5}\leqslant4a^2+b^2\leqslant\frac{4}{3}$，C正确；

由 $4a^2-ab+b^2=1$ 得 $(2a-b)^2+3ab=1$.∴ $(2a-b)^2=1-3ab=1+\frac{3}{2}\cdot 2a\cdot(-b)$,

令 $|2a-b|=u$,同理依据均值不等式 $2a\cdot(-b)\leqslant\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$ 可得 $u^2\leqslant 1+\frac{3}{8}u^2$,所以 $u^2\leqslant\frac{8}{5}$,

故 D 正确;选择 ACD.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. π 14. $y=2x-2$ 15. 720 16. (1)5 (2)$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$

15. 由于奇数学号的同学不能安排在周一、周三、周五三天,故先在偶数学号(2,4,6,8 四位)的同学中选出三位安排在周一、周三、周五,有 A_4^3 种,剩下的一位连同学号为奇数的五位同学,共 6 位同学中,选出两位安排在周二、周四值日即可,有 A_6^2,所以满足条件的不同安排方法种数为 $A_4^3\cdot A_6^2=720$

16. 由椭圆的参数方程,设 $A(2\cos\alpha,\sin\alpha)$,$B(2\cos\beta,\sin\beta)$,代入 $x_1x_2+4y_1y_2=0$ 得

$4\cos\alpha\cos\beta+4\sin\alpha\sin\beta=4\cos(\alpha-\beta)=0$,不失一般性,令 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$,从而 $A(2\cos\alpha,\sin\alpha)=$

$A\left(2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=A(-2\sin\beta,\cos\beta)$,则:

(1)$|OA|^2+|OB|^2=(4\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(4\cos^2\beta+\sin^2\beta)=5$

(2)由点 $A(-2\sin\beta,\cos\beta)$,$B(2\cos\beta,\sin\beta)$ 可得直线 AB 的方程为:

$(\cos\beta-\sin\beta)x+2(\cos\beta+\sin\beta)y-2=0$,从而坐标原点 O 到直线 AB 的距离:

$$|OH|=\frac{2}{\sqrt{(\cos\beta-\sin\beta)^2+4(\cos\beta+\sin\beta)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5+3\sin 2\beta}}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.

17. 解:(1)由 $a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ 得 $\sin A\sin B=\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)$,

∵ $\sin B\neq 0$,∴ $\sqrt{3}\sin A=\cos A$,即 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴ $A=\frac{\pi}{6}$; ……………………………………… (4 分)

(2)由题知 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}bc$,即 $bc=2a^2$,

又由余弦定理知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $b^2+c^2=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)bc$,

所以 $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… (10 分)

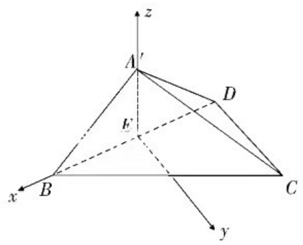
18. 解:(1)$S_8=4(a_4+a_5)=9a_4\Rightarrow 4a_5=5a_4\Rightarrow a_1=d$,故 $\frac{a_1}{d}=1$; ………………………………… (5 分)

(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(n+1)}{2}d$,$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, ………………………………… (8 分)

$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$,$1-\frac{1}{n+1}<1$,

故 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1$ 只需 $\frac{2}{d}\leqslant 1$,即 $d<0$ 或 $d\geqslant 2$. ………………………………… (12 分)

19. 解：(1)证明：在梯形 $ABCD$ 中，$AB=AD=DC=\frac{1}{2}BC=2$，$\therefore\ \angle B=60°$，



$\angle BDC=90°$，

取 BD 中点 E，连接 $A'E$，EC，则由 $A'B=A'D$ 得 $A'E\perp BD$，$A'E=1$，

$EC=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$，

故 $A'C^2=A'E^2+EC^2$，$\therefore A'E\perp EC$，$\therefore A'E\perp$ 平面 BCD，故 $A'E\perp CD$，

又 $CD\perp BD$，$\therefore CD\perp$ 平面 $A'BD$，$\therefore CD\perp A'B$；…………………………………………………（5 分）

(2)以 E 为原点，以$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{EA}$分别为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，则

$B(\sqrt{3},0,0)$，$A'(0,0,1)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{A'B}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{A'C}=(-\sqrt{3},2,-1)$，

$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$

设平面 $A'CD$ 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}-\sqrt{3}x+2y-z=0\\2y=0\end{cases}$，取 $x=1$ 得$\vec{m}=(1,0,-\sqrt{3})$，

$\cos<\overrightarrow{A'B},\vec{m}>=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故直线 $A'B$ 与平面 $A'CD$ 所成角为$\frac{\pi}{3}$. ………………………（12 分）

20. 解：(1)$\bar{x}=1\times\frac{6}{100}+3\times\frac{18}{100}+5\times\frac{35}{100}+7\times\frac{25}{100}+9\times\frac{10}{100}+11\times\frac{5}{100}+13\times\frac{1}{100}=5.68$；

……………………………………………………………………………………………………（3 分）

(2)

	潜伏期≤6 天	潜伏期>6 天	总计
60 岁以上(含 60 岁)	35	15	50
60 岁以下	24	26	50
总计	59	41	100

$K^2=\frac{(35\times26-24\times15)^2\times100}{50\times50\times59\times41}\approx5>3.841$，故有 95% 的把握认为该传染病的潜伏期与患者年龄有关；

……………………………………………………………………………………………………（7 分）

(3)设这 10 人中有 X 人潜伏期不超过 8 天，由题知 $X\sim B(10,0.84)$，则 $P(X=k)=C_{10}^{k}0.84^{k}0.16^{10-k}$，

$k=0,1,2,\cdots,10$，由$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{C_{10}^{k+1}0.84^{k+1}0.16^{9-k}}{C_{10}^{k}0.84^{k}0.16^{10-k}}=\frac{21(10-k)}{4(k+1)}$，

当 $k<8.24$ 时，$P(X=k)<P(X=k+1)$，当 $k>8.24$ 时，$P(X=k)>P(X=k+1)$，故 $P(X=9)$最大，

所以抽到的 10 人中潜伏期不超过 8 天的人数最有可能为 9 人. ………………………………（12 分）

21. 解：(1)$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+a-1$，$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，$\therefore f'(x)$在$(0,1)$上单减，在$(1,+\infty)$上单增，

$f'(1)=a\geqslant0$，故$f'(x)\geqslant0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单增；…………………………………………（4 分）

(2)由(1)知，当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单增，$x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

故$f(x)$有唯一零点；…………………………………………………………………………（6 分）

当 $a<0$ 时，$f'(1)<0$，$x\to0$ 时$f'(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时$f'(x)\to+\infty$，故存在 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$

使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单增，在 (x_1,x_2) 上单减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单增，$f(x_1)=(x_1+1)\ln x_1+(-1-\frac{1}{x_1}-\ln x_1)x_1+2=\ln x_1-x_1+1$，

易证 $\ln x_1-x_1+1<0$，故 $f(x_1)<0$，$\because x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一零点. ………………………………………………………… (12 分)

22. 解：(1) 由题意知，P,Q 之间距离的最小值为 1 等价于 P,C_2 之间距离最小值为 2.

设 $P(x_P,y_P)$，则 $|PC_2|^2=(x_P-p)^2+y_P^2=x_P^2-2px_P+p^2+2px_P=x_P^2+p^2\geqslant p^2$，从而 $p^2=4\Rightarrow p=2$，进而抛物线 C_1 和圆 C_2 的方程分别为：

$C_1:y^2=4x\qquad C_2:(x-2)^2+y^2=1$ ………………………………………………………… (4 分)

(2) 若存在，设 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，显然 y_0,y_1,y_2 均不等于 ±1

①当 $\triangle ABC$ 三边所在直线中，存在斜率不存在的情况时：由对称性知，若 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2，则三角形必有一个顶点为坐标原点，不妨设为 C，且另两个顶点连线必垂直于 x 轴，即为直线 $AB:x=3$，此时直线 CA,CB 分别为：$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$，$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$，易知直线 CA,CB 不与圆 C_2 相切，与假设矛盾。所以，此时 $\triangle ABC$ 不存在；………………………………………………………………… (5 分)

②当 $\triangle ABC$ 三边所在直线斜率都存在时：

设过 A 点圆 C_2 的切线为：$y-y_0=k(x-x_0)$，即为：$kx-y+y_0-\frac{1}{4}ky_0^2=0$

由相切知 $\frac{\left|2k+y_0-\frac{1}{4}ky_0^2\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow\left[\left(2-\frac{1}{4}y_0^2\right)k+y_0\right]^2=k^2+1$

$\Rightarrow\left[\left(2-\frac{1}{4}y_0^2\right)^2-1\right]k^2+2y_0\left(2-\frac{1}{4}y_0^2\right)k+y_0^2-1=0(*)$

设 $k_{AB}=k_1$，$k_{AC}=k_2$，则 k_1,k_2 为方程 $(*)$ 的两根；

另方面，$k_1=\frac{y_1-y_0}{\frac{1}{4}y_1^2-\frac{1}{4}y_0^2}=\frac{4}{y_1+y_0}$，$k_2=\frac{y_2-y_0}{\frac{1}{4}y_2^2-\frac{1}{4}y_0^2}=\frac{4}{y_2+y_0}$，将 k_1,k_2 代入方程 $(*)$，并整理得：

$(y_0^2-1)y_i^2+14y_0y_i+63-y_0^2=0(i=1,2)$

从而 $y_1+y_2=\frac{-14y_0}{y_0^2-1}$，$y_1y_2=\frac{63-y_0^2}{y_0^2-1}(\#)$ ………………………………………………………… 9 分

又直线 BC 的方程为：$4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$

此时圆心 $C_2(2,0)$ 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|8+y_1y_2|}{\sqrt{16+(y_1+y_2)^2}}$，将 $(\#)$ 代入得：

$d=\frac{|8+y_1y_2|}{\sqrt{16+(y_1+y_2)^2}}=\frac{|7y_0^2+55|}{2\sqrt{4y_0^4+41y_0^2+4}}$，令 $d=1\Rightarrow(7y_0^2+55)^2=4(4y_0^4+41y_0^2+4)$

整理得 $33y_0^4+506y_0^2+3009=0$，此方程显然无解。与假设矛盾，此时 $\triangle ABC$ 不存在；

综上述，在抛物线 C_1 上不存在三点 A,B,C，使得 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2. …………………… (12 分)

关于我们