2023年3月高三调研考试·数学
参考答案、提示及评分细则

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	D	A	C	B	C	D

1.【详解】由 $e^{x-1}>1$ 得 $e^{x-1}>e^0$,函数 $y=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 $x-1>0$,即 $M=\{x\mid x>1\}$,又由 $x^2-2x<0$ 得 $0<x<2$,即 $N=\{x\mid 0<x<2\}$,所以 $M\cup N=\{x\mid x>0\}$.故选C.

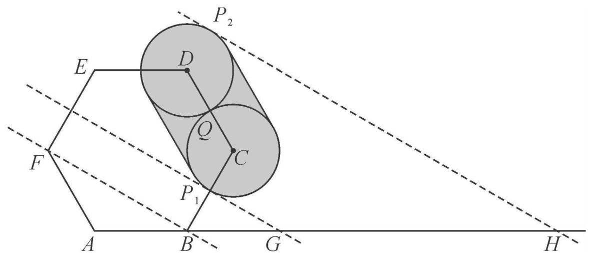
2.【详解】$z=\dfrac{-2+i}{1+2i}+1=\dfrac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+1=\dfrac{5i}{5}+1=1+i$,则 $|z|=\sqrt{2}$.故选A.

3.【详解】$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{2}$.故选D.

4.【详解】"礼"排第一,分"射"排二或六,有 $2A_3^3$ 种,及"射"排三、四、五,有 $3A_2^1A_2^1A_2^2$ 种,故"六艺"课程讲座不同的排课顺序共有36种.故选A.

5.【详解】设 $|AB|=|AF_1|=x(x>0)$,由双曲线的定义得 $|BF_1|=2x$,$|BF_2|=2x-2a$,$|AF_2|=x+2a$,由 $BF_1\perp BF_2$ 得 $|AF_2|^2=|AB|^2+|BF_2|^2\Rightarrow(x+2a)^2=x^2+(2x-2a)^2$,解得 $x=3a$,所以 $|BF_1|=6a$,$|BF_2|=4a$,在 $\triangle BF_1F_2$ 中,由勾股定理得 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2\Rightarrow(2c)^2=(6a)^2+(4a)^2$,整理得 $c^2=13a^2$,即双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{13}$,故选C.

6.【详解】随着动点圆心 Q 在线段 CD(含端点)上运动,点 P 的运动区域为阴影部分所示,如图,作直线 BF 的平行线 l,使得 l 与阴影区域有公共点,离 BF 最近的直线 l 记为 P_1G(P_1 为 l 与圆 C 的切点,G 为 l 与直线 AB 的交点),离 BF 最远的直线 l 记为 P_2H(P_2 为 l 与圆 D 的切点,H 为 l 与直线 AB 的交点).



设 $\overrightarrow{AP_1}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$,由等和线结论,$m+n=\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{2AB}{AB}=2$.此为 $m+n$ 的最小值.设 $\overrightarrow{AP_2}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$,由等和线结论,$m+n=\dfrac{AH}{AB}=5$.此为 $m+n$ 的最大值.综上可知,$m+n\in[2,5]$.故选B.

7.【详解】由题意知,$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$,$\triangle OA_1A_2$,$\triangle OA_2A_3$,$\cdots$,$\triangle OA_7A_8$ 都是直角三角形,$\therefore a_1=1$,且 $a_n^2=a_{n-1}^2+1(n\geqslant2)$,$\therefore$ 数列 $\{a_n^2\}$ 是以1为首项,1为公差的等差数列,$\therefore a_n^2=1+(n-1)\times1=n$.又 $a_n>0$,$\therefore a_n=\sqrt{n}$.$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\sqrt{n}$.$\therefore a_{25}=\sqrt{25}=5$.故选C.

8.【详解】设底边长为 a,原四棱锥的高为 h,如图1,O,O_1 分别是上下底面的中心,连接 OO_1,O_1A_1,OA,根据边长关系,知该棱台的高为 $\dfrac{h}{2}$,则 $V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{1}{3}\cdot\left[a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\sqrt{a^2\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}\right]\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{7a^2h}{24}$,

由 $AA_1=\sqrt{3}$，且四边形 AOO_1A_1 为直角梯形，$O_1A_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，可得 $\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\sqrt{3}$，则 $h=2\sqrt{3-\frac{a^2}{8}}$，$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\frac{7a^2h}{24}=\frac{7a^2}{12}\sqrt{3-\frac{a^2}{8}}=\frac{7}{48}\sqrt{a^2\cdot a^2(48-2a^2)}$ $\leqslant\frac{7}{48}\sqrt{\left(\frac{a^2+a^2+48-2a^2}{3}\right)^3}=\frac{28}{3}$，当且仅当 $a^2=48-2a^2$，即 $a=4$ 时等号成立，此时棱台的高为 1.

上底面外接圆半径 $r_1=A_1O_1=\sqrt{2}$，下底面半径 $r=AO=2\sqrt{2}$，设球的半径为 R，显然球心 M 在 OO_1 所在的直线上.

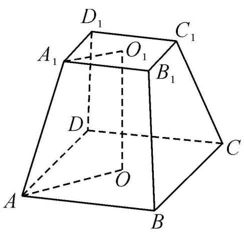


图 1

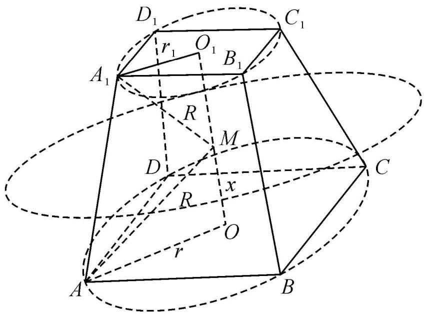


图 2

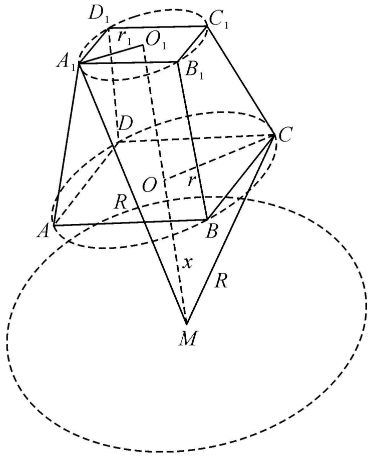


图 3

当棱台两底面在球心异侧时，即球心 M 在线段 OO_1 上，如图 2，设 $OM=x$，则 $O_1M=1-x$，$0<x<1$，显然 $MA=MA_1=R$，则有 $\sqrt{r^2+x^2}=\sqrt{r_1^{\ 2}+(1-x)^2}$，即 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2+x^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(1-x)^2}$，解得 $x<0$，舍去.

当棱台两底面在球心同侧时，显然球心 M 在线段 O_1O 的延长线上，如图 3，设 $OM=x$，则 $O_1M=1+x$，显然 $MC=MA_1=R$，即 $\sqrt{r^2+x^2}=\sqrt{r_1^{\ 2}+(1+x)^2}$，即 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2+x^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(1+x)^2}$，解得 $x=\frac{5}{2}$，$R=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{57}}{2}$，此时外接球表面积为 $4\pi R^2=4\times\left(\frac{\sqrt{57}}{2}\right)^2\pi=57\pi$. 故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，选对但不全对的得 2 分.

9	10	11	12
AC	BD	AD	ABC

9.【详解】$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. A. $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，由正弦函数性质知它是减函数，A 正确；B. 当 $x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x_1)=f(x_2)=\frac{1}{2}$，但 $x_1-x_2=-\frac{\pi}{3}$ 不是 π 的整数倍，B 错误；C. $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin 2x$，故 $y=g(x)$ 是奇函数，C 正确；D. $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，在 $(0,\pi)$ 上，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，$2x-\frac{\pi}{6}=0$ 或 π 时，$f\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，因此有两个零点，而 $(0,8\pi)$ 含有 8 个周期，因此有 16 个零

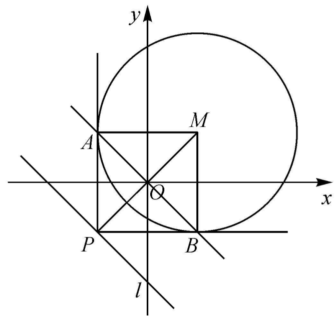
点,D 错误.故选 AC.

10.【详解】如图所示:由圆的几何性质可得 $MA\perp PA$,$MB\perp PB$,

由切线长定理可得 $|PA|=|PB|$,因为 $|MA|=|MB|$,$|MP|=|MP|$,所以 $\triangle PAM\cong\triangle PBM$,

所以 $S_{四边形MAPB}=2S_{\triangle PAM}=|PA|\cdot|AM|=2|PA|$,因为 $|PA|=\sqrt{|MP|^2-|MA|^2}=\sqrt{|MP|^2-4}$,当 $MP\perp l$ 时,$|MP|$ 取最小值,

且 $|MP|_{\min}=\dfrac{|1+1+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,所以四边形 $MAPB$ 的面积的最小值为 $2\times\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=4$,因为 $|MP|$ 无最大值,即 $|PA|$ 无最大值,故四边形 $MAPB$ 面积无最大值,C 错 D 对;



因为 $\angle APM$ 为锐角,$\angle APB=2\angle APM$,且 $\sin\angle APM=\dfrac{|AM|}{|MP|}=\dfrac{2}{|MP|}$,

故当 $|MP|$ 最小时,$\angle APM$ 最大,此时 $\angle APB$ 最大,此时 $|PA|=2$,A 错;

由上可知,当 $\angle APB$ 最大时,$|PA|=|PB|=|MA|=|MB|=2$ 且 $\angle PAM=90°$,故四边形 $MAPB$ 为正方形,且有 $MP\perp l$,则 MP 的方程为 $y=x$,联立 $\begin{cases}y=x,\\x+y+2=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$ 即点 $P(-1,-1)$,由正方形的几何性质可知,直线 AB 过线段 MP 的中点 $O(0,0)$,此时直线 AB 的方程为 $y=-x$,B 对.故选 BD.

11.【详解】由 $f(x)=\sqrt{x}$ 得 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,设直线 $y=mx+n$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 相切于点 $(t,\sqrt{t})$,则 $m=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0$ 且 $\sqrt{t}=mt+n$,消去 t 得 $n=\dfrac{1}{4m}$,所以 D 正确,C 错误;

$m+n=m+\dfrac{1}{4m}\geqslant2\sqrt{m\cdot\dfrac{1}{4m}}=1$,$m=\dfrac{1}{2}$ 取等号,B 错误;

$n\ln m=\dfrac{\ln m}{4m}$,设 $g(m)=\dfrac{\ln m}{4m}$,由 $g'(m)=\dfrac{1-\ln m}{4m^2}=0$ 得 $m=\mathrm{e}$,所以函数在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减,所以 $g(m)\leqslant g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{4\mathrm{e}}$,即 $n\ln m\leqslant\dfrac{1}{4\mathrm{e}}$,A 正确.故选 AD.

12.【详解】$y=f(x+3)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称,故 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称,$f(x)$ 是偶函数,B 正确;

$f(x)=f(x+4)+f(2)$ 中,令 $x=-2$ 得 $f(-2)=2f(2)$,因为 $f(-2)=f(2)$,所以 $f(2)=2f(2)$,解得 $f(2)=0$,A 正确;

故 $f(x)=f(x+4)$,$f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,C 正确;

$\forall x_1,x_2\in[0,2]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))>0$,故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,且 $f(x)$ 是偶函数,故 $f(0)=f(-4)$,$f(3)=f(-1)=f(1)$,因为 $f(1)>f(0)$,所以 $f(3)>f(-4)$,D 错误.故选 ABC.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\dfrac{2}{9}$　14. $x+8y-\dfrac{9}{2}=0$　15. 0　16. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

13.【详解】直线 $y=kx+b$ 不经过第二象限,则 $k\geqslant0$,$b\leqslant0$,从集合 $A=\{-2,1,3\}$ 中随机选取一个数 k,从集合 $B=\{-1,2,3\}$ 中随机选取一个数 b,则 (k,b) 有 9 种,满足 $k\geqslant0$,$b\leqslant0$ 的有 $(1,-1)$,$(3,-1)$,共 2 种,所以所求概率为 $\dfrac{2}{9}$.

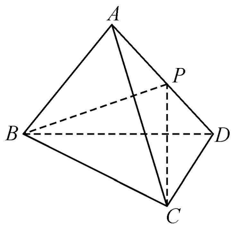
14.【详解】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 AB 的中点 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

由题意可得 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$,$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2}$,将 AB 的坐标代入双曲线的方程 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{8}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{8}+y_2^2=1,\end{cases}$ 作差可得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+y_1^2-y_2^2=0$,整理可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{1}{8}$,即直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{8}$,所以直线 AB 的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,整理可得 $x+8y-\frac{9}{2}=0$.

15.【详解】由切点 $P(x_1,y_1)$,$y'=e^x$,则 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-y_1=e^{x_1}(x-x_1)$,即 $y=e^{x_1}x+e^{x_1}\cdot(1-x_1)$,由切点 $Q(x_2,y_2)$,$y'=3x^2$,则 $y=x^3$ 在点 Q 处的切线方程为 $y-y_2=3x_2^2(x-x_2)$,即 $y=3x_2^2x-2x_2^3$,由题知:两条直线是同一条直线,则 $\begin{cases}e^{x_1}=3x_2^2,\\ e^{x_1}(1-x_1)=-2x_2^3,\end{cases}$ 化简得 $x_1-\frac{2}{3}x_2=1$. $\therefore \ln\left(x_1-\frac{2}{3}x_2\right)=0$. 故答案为 0.

16.【详解】过点 A 的平面 α 与平面 PBC 平行. 若平面 α 与平面 ABD,平面 ACD 的交线分别为 m,n,由于平面 α∥平面 PBC,平面 $PBC\cap$平面 $ABD=PB$,平面 $PBC\cap$平面 $ACD=PC$ 所以 $m\parallel BP$,$n\parallel PC$,所以 $\angle BPC$ 或其补角即为 m,n 所成的平面角,设正四棱锥 $ABCD$ 的棱长为 1,$AP=x$,$0<x<1$,则 $PD=1-x$,在 $\triangle ABP$ 中,由余弦定理得 $BP=\sqrt{AB^2+AP^2-2AB\cdot AP\cos 60^\circ}=\sqrt{1+x^2-2\times1\times x\times\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x^2-x}$,同理 $PC=\sqrt{CD^2+PD^2-2CD\cdot PD\cos 60^\circ}=\sqrt{1+(1-x)^2-2\times1\times(1-x)\times\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-x+1}$,

故在 $\triangle PBC$ 中,$\cos\angle BPC=\frac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=\frac{2(x^2-x+1)-1}{2(x^2-x+1)}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-x+1}=1-\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$,



由于 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,则 $\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leqslant\frac{2}{3}$,进而 $1-\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geqslant\frac{1}{3}$,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时取等号,

故 $\cos\angle BPC$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$,进而 $\sin\angle BPC=\sqrt{1-\cos^2\angle BPC}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故 $\sin\angle BPC$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$,故答案为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【详解】(1)由 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$ 得 $a\cos C=(2b-c)\cos A$,$\therefore a\cos C+c\cos A=2b\cos A$,

得到 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos A$, …………………………………………………………… 2 分

所以 $\sin(A+C)=2\sin B\cos A$,又 $A+C=\pi-B$,所以 $\sin B=2\sin B\cos A$. ……………………………… 3 分

又 $\sin B\neq0$,$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$,又 $A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$; …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $A=\frac{\pi}{3}$, $B+C=\frac{2\pi}{3}$, ∵ B,C 为锐角，所以 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

$\therefore C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, ………… 6 分

$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$, ………… 8 分

其中 $\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2\tan C}\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$,

综上可知，$\frac{b}{c}$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},2\right)$. ………… 10 分

18.【详解】(1)因为 $\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{\frac{a_n+1}{2a_n}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1}{2}$. ………… 2 分

又 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}\neq 0$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是一个首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列；………… 5 分

(2)由(1)知，当 n 为偶数时，$b_n=\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2^n}$,

当 n 为奇数时，$b_n=\frac{n+2}{n}+\frac{n}{n+2}-2=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$, ………… 8 分

故 $b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2k-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2k})$

$=\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}\right)+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}$

$=2-\frac{2}{2k+1}+\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}$, ………… 10 分

由于 $\frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}$ 单调递增且 $n\to\infty$ 时，$\frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}\to\frac{7}{3}$,

所以 m 的最小值为 $\frac{7}{3}$. ………… 12 分

19.【详解】(1)由题意知样本平均数为 $x=45\times 0.1+55\times 0.15+65\times 0.2+75\times 0.3+85\times 0.15+95\times 0.1=70.5$, ………… 1 分

所以 $(\mu-\sigma,\mu+2\sigma]=(70.5-14.31,70.5+2\times 14.31]=(56.19,99.12]$,

又 $P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<Z\leqslant\mu+2\sigma)=0.8186$, ………… 3 分

故该校得分位于区间 $(56.19,99.12]$ 内的人数约为 $3000\times 0.8186\approx 2456$；………… 5 分

(2)①$P=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$; ………… 6 分

②设李同学参加抽奖活动获得用餐券金额为 X, X 的可能取值为 0,2,4,6,8,

则 $P(X=0)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$P(X=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，$P(X=8)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，

所以概率分布列为

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

………………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{16}=\frac{15}{8}<2$，

所以李同学选领取早餐奶券更合算. ………………………………………………………… 12 分

20.【详解】(1)延长 AD 到 E，使 $AD=DE=4$，连接 EC，PE.

由已知得四边形 $PCED$ 为平行四边形，故 $BD/\!/EC$.

又 $AB^2=AD^2+BD^2$，所以 $BD\perp AD$，

由已知得 $BD\perp PD$，故 $BD\perp$ 平面 PAE，……………………………………………… 3 分

所以 $EC\perp$ 平面 PAE，所以 $EC\perp PE$.

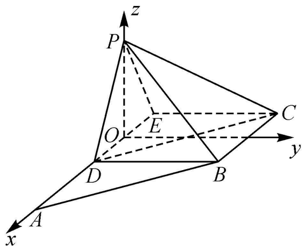
因为 $\angle PDA=120^\circ$，所以 $\angle PDE=60^\circ$，又 $PD=DE=4$，

所以 $\triangle PAE$ 为等边三角形，故 $PE=4$.

又 $EC=BD=3$，所以 $PC=\sqrt{PE^2+EC^2}=5$；………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知四边形 $BCED$ 为矩形，取 DE 中点 O，连接 OP.

以 OA，OP 分别为 x，z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图.



则 $P(0,0,2\sqrt{3})$，$D(2,0,0)$，$B(2,3,0)$，$C(-2,3,0)$.

$\overrightarrow{PD}=(2,0,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB}=(2,3,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(-2,3,-2\sqrt{3})$. ……… 7 分

设平面 PDB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1+3y_1-2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=\sqrt{3}$，$y_1=0$，$z_1=1$，故 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,0)$ … 9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2x_2+3y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2+3y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=0$，$y_2=2$，$z_2=\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{n}=(0,2,\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{21}}{14}$， ………………………………………………………… 11 分

由已知二面角 $D-PB-C$ 为钝角，故二面角 $D-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………… 12 分

21.【详解】(1)抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 $F(0,1)$，$\therefore c=1$.

$\because$ 椭圆上的点 M 到点 F 的最大距离为 3，$\therefore a+c=3$，$b^2=a^2-c^2$，

解得 $a=2$，$b^2=3$，$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$；…………………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_0,y_0)$,则 $\frac{y_0^2}{4}+\frac{x_0^2}{3}=1$,$x_0^2=3-\frac{3y_0^2}{4}$.

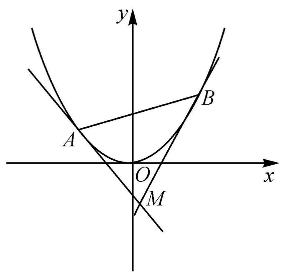
联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1,\end{cases}$ 化为 $3y^2+16y-12=0$,$y\in[-2,2]$,解得 $y=\frac{2}{3}$,

$\therefore y_0\in\left[-2,\frac{2}{3}\right)$, …………………………………………………………………… 5 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,求导 $x^2=4y$,可得 $y'=\frac{1}{2}x$,

$\therefore$ 切线 MA,MB 的方程分别为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$,$y-\frac{x_2^2}{4}=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)$,

可得 x_1,x_2 为方程 $t^2-2x_0t+4y_0=0$ 的两个不等实数根. $\therefore x_1+x_2=2x_0$,$x_1x_2=4y_0$,



$\therefore k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4}=\frac{x_0}{2}=k$,

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2+x_1}{4}(x-x_1)$,

化为 $y=\frac{x_2+x_1}{4}x-\frac{x_1x_2}{4}$,

代入可得 $y=\frac{x_0}{2}x-y_0$,化为 $x_0x-2y-2y_0=0$,

$\therefore$ 点 M 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$,

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\left(1+\frac{x_0^2}{4}\right)(4x_0^2-16y_0)}$, ……………………………………… 8 分

$\therefore\triangle MAB$ 面积 $S=\frac{1}{2}d|AB|=\frac{1}{4}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}$,

把 $x_0^2=3-\frac{3y_0^2}{4}$ 代入上式可得 $S=\frac{1}{4}\left|3-\frac{3y_0^2}{4}-4y_0\right|\cdot\sqrt{12-3y_0^2-16y_0}=\frac{1}{16}(12-3y_0^2-16y_0)^{\frac{3}{2}}$,

$\because y_0\in\left[-2,\frac{2}{3}\right)$,由 $t=12-3y_0^2-16y_0=-3\left(y_0+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{100}{3}$, ……………………………………… 10 分

$\therefore$ 当 $y_0=-2$ 时,t 取得最大值 32. $\therefore\triangle MAB$ 面积的最大值为 $8\sqrt{2}$. ……………………………………… 12 分

22.【详解】(1)函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

求导得 $f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$, …………………………………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

当 $a>0$ 时,$f'(x)<0$ 的解集为 $(0,a)$,$f'(x)>0$ 的解集为 $(a,+\infty)$, ……………………………… 3 分

即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(a,+\infty)$,单调减区间为 $(0,a)$,

所以当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增,在 $(0,a)$ 上单调递减; …………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x_1)=f(x_2)=2(x_1\neq x_2)$,由(1)知 $a>0$,

且 $f(x)_{\min}=f(a)=\ln a+1<2$,解得 $a\in(0,e)$, …………………………………………………… 6 分

设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<a<x_2$，要证 $x_1x_2>a^2$，即证 $x_2>\frac{a^2}{x_1}>a$，即证 $f(x_2)>f\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore$ 即证 $f(x_1)>f\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$，设 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{a^2}{x}\right)=2\ln x+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}-2\ln a$，$x\in(0,a)$，

则 $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{a}=\frac{-(x-a)^2}{ax^2}<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，有 $g(x)>g(a)=0$，

即 $f(x)>f\left(\frac{a^2}{x}\right)(x\in(0,a))$，则 $f(x_1)>f\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$ 成立，因此 $x_1x_2>a^2$ 成立，…………………… 8分

要证 $x_1x_2<a\mathrm{e}$，即证 $a<x_2<\frac{a\mathrm{e}}{x_1}$，即证 $f(x_2)<f\left(\frac{a\mathrm{e}}{x_1}\right)$，即证 $f(x_1)<f\left(\frac{a\mathrm{e}}{x_1}\right)$，

即证 $2<\frac{x_1}{\mathrm{e}}-\ln x_1+\ln a+1$，$x_1\in(0,a)$，

而 $\frac{a}{x_1}+\ln x_1=2\Leftrightarrow a=x_1(2-\ln x_1)$，即证 $1<\frac{x_1}{\mathrm{e}}+\ln(2-\ln x_1)$，$x_1\in(0,a)$，

令 $h(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}+\ln(2-\ln x)$，$x\in(0,\mathrm{e})$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x(2-\ln x)}+\frac{1}{\mathrm{e}}$， ……………………… 10分

设 $\varphi(x)=x(2-\ln x)$，$x\in(0,\mathrm{e})$，求导得 $\varphi'(x)=1-\ln x>0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，

则有 $0<\varphi(x)<\varphi(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，而 $(0,a)\subseteq(0,\mathrm{e})$，

当 $x\in(0,a)$ 时，$h(x)>h(a)>h(\mathrm{e})=1$，

则当 $x\in(0,a)$ 时，$1<\frac{x}{\mathrm{e}}+\ln(2-\ln x)$ 成立，故有 $x_1x_2<a\mathrm{e}$ 成立，所以 $a^2<x_1x_2<a\mathrm{e}$. …………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。