2023 届六校第一次联考

数学试题

命题人：东莞中学 庞兴　　审题人：东莞中学 陈剑

满分：150 分。考试时间：120 分钟。

注意事项：1.答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。并用 2B 铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的，答卷无效。

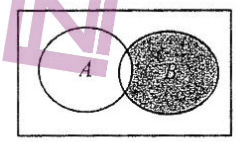
2.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}>0\right.\right\}$，$B=\{x|y=\ln(3-x)\}$，则如图中阴影部分表示的集合为（　　）



A．$[-1,3]$　　B．$(3,+\infty)$　　C．$(-\infty,3]$　　D．$[-1,3)$

2. 设复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，其中 i 是虚数单位，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，下列判断中错误的是（　　）

A．$z\bar{z}=1$　　B．$z^2=\bar{z}$

C．z 是方程 $x^2-x+1=0$ 的一个根　　D．满足 $z^n\in\mathbf{R}$ 最小正整数 n 为 3

3.直线 $y=x-1$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，且与 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

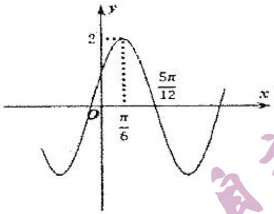
4. 我们将服从二项分布的随机变量称为二项随机变量，服从正态分布的随机变量称为正态随机变量.概率论中有一个重要的结论：若随机变量 $Y\sim B(n,p)$，当 n 充分大时，二项随机变量 Y 可以由正态随机变量 X 来近似地替代，且正态随机变量 X 的期望和方差与二项随机变量 Y 的期望和方差相同.法国数学家棣莫弗 $(1667-1754)$ 在 1733 年证明了 $p=\frac{1}{2}$ 时这个结论是成立的，法国数学家、物理学家拉普拉斯 $(1749-1827)$ 在 1812 年证明了这个结论对任意

的实数 $p\in(0,1]$ 都成立，因此，人们把这个结论称为棣莫弗一拉普拉斯极限定理.现抛掷一枚质地均匀的硬币 900 次，利用正态分布估算硬币正面向上次数不少于 420 次的概率为（　　）

（附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6827, P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx0.9973$）

A．0.97725　　B．0.84135　　C．0.65865　　D．0.02275

5．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathrm{R},A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A．直线 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B．$f(x)$ 图象的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12}+k\pi,0)$，$k\in Z$

C．$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D．将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，可得到一个奇函数的图象

6．中国古代的蹴鞠游戏中的"蹴"的含义是脚蹴、踢，"鞠"最早系外包皮革、内饰米糠的球，因而"蹴鞠"就是指古人以脚蹴、踢皮球的活动，如图所示.已知某"鞠"的表面上有四个点 P,A,B,C，满足 $PA=1,PA\perp$ 面 ABC，$AC\perp BC$，若 $V_{P-ABC}=\frac{2}{3}$，则该"鞠"的体积的最小值为（　　）

2

A. $\frac{25}{6}\pi$　　B. 9π　　C. $\frac{9}{2}\pi$　　D. $\frac{9}{8}\pi$

7．设 $a=\frac{2(2-\ln 2)}{e^2}$，$b=\frac{\ln 2}{2}$，$c=\frac{1}{e}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

8. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0, f(x)=f(2-x)$；且当 $x\in[0,1]$ 时，

$f(x)=x^3-x^2+x$．则方程 $7f(x)-x+2=0$ 所有的根之和为（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 10　　D. 8

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9．英国数学家贝叶斯在概率论研究方面成就显著，根据贝叶斯统计理论，随机事件 A、B 存在如下关系：$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.王同学连续两天在某高校的甲、乙两家餐厅就餐，王同学第一天去甲、乙两家餐厅就餐的概率分别为 0.4 和 0.6.如果他第一天去甲餐厅，那么第二天去甲餐厅的概率为 0.6；如果第一天去乙餐厅，那么第二天去甲餐厅的概率为 0.5，则王同学（　　）

A．第二天去甲餐厅的概率为 0.54

B．第二天去乙餐厅的概率为 0.44

C．第二天去了甲餐厅，则第一天去乙餐厅的概率为 $\frac{5}{9}$

D．第二天去了乙餐厅，则第一天去甲餐厅的概率为 $\frac{4}{9}$

10.已知函数 $f(x)=\sin|x|-|\cos x|$，下列关于此函数的论述正确的是（　　）

A．π 是 $f(x)$ 的一个周期

B．函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{2},1\right]$

C．函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递减

D．函数 $f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 内有 4 个零点

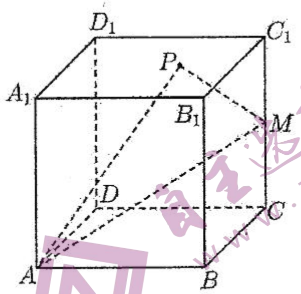
11．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，点 P，Q 是双曲线 C 上关于原点对称的两点（异于顶点），直线 PA_1，PA_2，QA_1 的斜率分别为 k_{PA_1}，k_{PA_2}，k_{QA_1}，

若 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{3}{4}$，则下列说法正确的是（　　）

A．双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$　　B．双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C．$k_{PA_1}\cdot k_{QA_1}$ 为定值　　D．$\tan\angle A_1PA_2$ 的取值范围为 $(0,+\infty)$

12．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 M 为 CC_1 的中点，点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点，则（　　）



A．满足 $MP//$平面 BDA_1 的点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

B．满足 $MP\perp AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

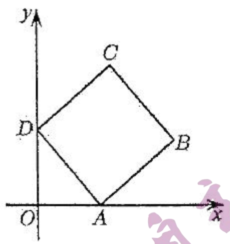
C．不存在点 P，使得平面 AMP 经过点 B

D．存在点 P 满足 $PA+PM=5$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若 $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中的常数项是______．

14．如图放置的边长为 2 的正方形 $ABCD$ 顶点 A，D 分别在 x 轴，y 轴正半轴（含原点）上滑动，则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值是________．



15．已知⊙C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l：$x+2y+2=0$，M 为直线 l 上的动点，过点 M 作⊙C 的切线 MA，MB，切点为 A，B，当四边形 $MACB$ 的面积取最小值时，直线 AB 的方程为________．

16．若不等式$a(x+1)e^x-x<0$有且仅有一个正整数解，则实数a的取值范围是____.

四、解答题：本题共6小题，第17题10分，第18~22题各12分，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．在ΔABC中，内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，已知$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

(1)求角B的大小；

(2)在下列两个条件中选择一个作为已知，求BC边上的中线AM的长.

①ΔABC的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

②ΔABC的周长为$4+2\sqrt{3}$.

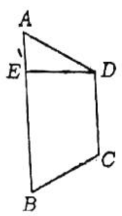
18．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$2S_n=na_{n+1}$，$n\in N^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

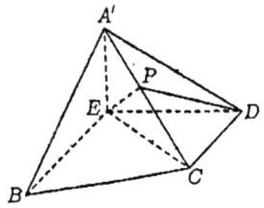
(2) 设数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_nb_{n+1}=2^n$，$n\in N^*$，按照如下规律构造新数列$\{c_n\}$：

$a_1,b_2,a_3,b_4,a_5,b_6,a_7,b_8,\cdots$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

19．如图（一）四边形$ABCD$是等腰梯形，$DC\,//\,AB$，$DC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=60°$，过D点作$DE\perp AB$，垂足为E点，将ΔAED沿DE折到$\Delta A'ED$位置如图（二），且$A'C=2\sqrt{2}$



图(一)



图(二)

(1)证明：平面$A'ED\perp$平面$EBCD$；

(2)已知点P在棱$A'C$上，且$\frac{A'P}{PC}=\frac{1}{2}$，求平面$CEP$与平面$DEP$夹角的余弦值.

20.足球是一项大众喜爱的运动。2022卡塔尔世界杯揭幕战将在2022年11月21日打响，决赛定于12月18日晚进行，全程为期28天.

(1) 为了解喜爱足球运动是否与性别有关，随机抽取了男性和女性各100名观众进行调查，得到2×2列联表如下：

	喜爱足球运动	不喜爱足球运动	合计

5

男性	60	40	100
女性	20	80	100
合计	80	120	200

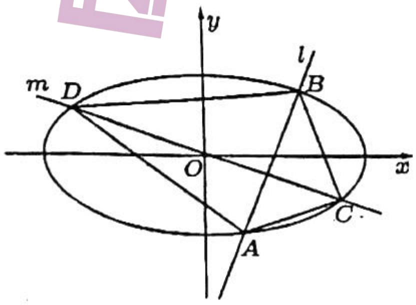
依据小概率值 $a=0.001$ 的独立性检验，能否认为喜爱足球运动与性别有关？

（2）校足球队中的甲、乙、丙、丁四名球员将进行传球训练，第1次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能的将球传给另外三个人中的任何一人，如此不停地传下去，且假定每次传球都能被接到．记开始传球的人为第1次触球者，第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n，即 $P_1=1$．

（i）求 P_3（直接写出结果即可）；

（ii）证明：数列 $\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$ 为等比数列，并判断第19次与第20次触球者是甲的概率的大小．

21．椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $E(1,1)$ 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；直线 l 与椭圆 C_1 交于 A，B 两点，且以 AB 为直径的圆过原点.



(1)求椭圆 C_1 的方程；

(2)若过原点的直线 m 与椭圆 C_1 交于 C,D 两点，且 $\overrightarrow{OC}=t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

22．已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-1$，

(1)求证：$f(x-1)\le 2\sqrt{x}-3$；

(2)设函数 $g(x)=(x+1)f(x)-\frac{1}{2}ax^2+1$，若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值，求实数 a 的取值范围．

6

2023届六校第一次联考数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题满分5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	A	C	C	B	A

二、多项选择题：本题共4小题，每小题满分5分，共20分。

题号	9	10	11	12
全部正确选项	AC	BD	BCD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.40　　14.8　　15. $x+2y+1=0$　　16. $[\frac{2}{3e^2},\frac{1}{2e})$

17.解：(1)$\because c=2b\cos B$，则由正弦定理可得$\sin C=2\sin B\cos B$，　$\therefore \sin 2B=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$2B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore 2B=\frac{\pi}{3}$，解得$B=\frac{\pi}{6}$.

(2)若选择（1），由（1）可得$A=\frac{\pi}{6}$，即$a=b$　则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得$a=\sqrt{3}$，

则由余弦定理可得$|AM|=\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot b\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

若选择（2）：由（1）可得$A=\frac{\pi}{6}$，设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，　则由正弦定理可得

$a=b=2R\sin\frac{\pi}{6}=R$，$c=2R\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}R$，则周长$a+b+c=2R+\sqrt{3}R=4+2\sqrt{3}$，解得$R=2$，则$a=2$，

$c=2\sqrt{3}$，　则由余弦定理可得

$$|AM|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{7}$$

18.解：（1）当$n=1$时，由$a_1=1$且$2S_n=na_{n+1}$得$a_2=2$

当$n\geq 2$时，由$2S_{n-1}=(n-1)a_n$得$2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}(n\geq 2)$.

所以$\frac{a_n}{n}=\frac{a_2}{2}=1$，$a_n=n(n\geq 2)$，　又当$n=1$时，$a_1=1$，适合上式.

所以$a_n=n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

（2）因为$b_nb_{n+1}=2^n$，$b_{n+1}b_{n+2}=2^{n+1}$，所以$\frac{b_{n+2}}{b_n}=2(n\in\mathbf{N}^*)$，　又$b_1b_2=2$，所以$b_2=2$.

所以数列$\{b_n\}$的偶数项构成以$b_2=2$为首项、2为公比的等比数列.

故数列$\{c_n\}$的前$2n$项的和$T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$，

$T_{2n}=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}+n^2-2$　所以数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$2^{n+1}+n^2-2$.

19.解：(1)证明：在等腰梯形$ABCD$中，$DE\perp AB$，$\therefore DE\perp AE$，$\therefore A'E\perp DE$

$DC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=60°$，$\therefore BE=3$，$BC=AD=2$，$DE=\sqrt{3}$

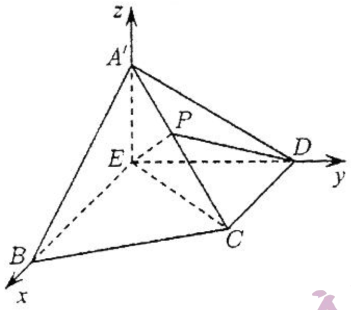
在$\triangle EBC$中，知$EC=\sqrt{7}$，$\because A'E=AE=1$，$\because A'C=2\sqrt{2}$，

$\therefore A'E^2+EC^2=A'C^2$ $\therefore A'E\perp EC$， 又EC，$DE\subset$面$EBCD$，$EC\cap DE=E$，$\therefore A'E\perp$面$EBCD$

$\because A'E\subset$面$A'ED$，$\therefore$面$A'ED\perp$面$EBCD$

(2)由（1）知$A'E\perp$面$EBCD$，$ED\perp EB$

$\therefore$以E为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系$E-xyz$



$\therefore A'(0,0,1)$，$D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(2,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{CA'}=\left(-2,-\sqrt{3},1\right)$设$\because \dfrac{A'P}{PC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{CP}{CA'}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \overrightarrow{CP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA'}$，

$\therefore \overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CP}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$是面$CEP$的法向量，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EP}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1+\dfrac{2}{3}z_1=0\\ 2x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，令$x_1=\sqrt{3}$，$\therefore y_1=-2$，$z_1=0$，$\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3},-2,0\right)$

设$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$是面$DEP$的法向量，$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EP}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}2x_2+\sqrt{3}y_2+2z_2=0\\ \sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，$\therefore y_2=0$

令$z_2=-1$，$\therefore x_2=1$，$\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$。

设平面CEP与平面DEP夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3+4}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$

$\therefore$平面CEP与平面DEP夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{14}$

20.解：（1）假设H_0：喜爱足球运动与性别独立，即喜爱足球运动与性别无关.

根据列联表数据，经计算得

$$\chi^2=\frac{200\times(60\times80-20\times40)^2}{100\times100\times80\times120}=\frac{100}{3}>10.828=x_{0.001}$$

根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为喜爱足球运动与性别有关，此推断犯错误的概率不超过0.001.

（2）（i）由题意$P_3=\dfrac{1}{3}$.

(ii) 第n次触球者是甲的概率记为P_n，则当$n\geq 2$时，第$n-1$次触球者是甲的概率为P_{n-1}，

第$n-1$次触球者不是甲的概率为$1-P_{n-1}$，则

$$P_n=P_{n-1}\cdot 0+(1-P_{n-1})\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$$

从而$P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$， 又$P_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\therefore\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$是以$\frac{3}{4}$为首项，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

则$P_n=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$， $\therefore P_{19}=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{18}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$， $P_{20}=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{19}+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，

$P_{19}>P_{20}$，故第19次触球者是甲的概率大.

21.解：(1)椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$E(1,1)$，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$a^2=2c^2$，即$a^2=2b^2$ 即$\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得$a^2=3,b^2=\frac{3}{2}$，

所以椭圆C_1的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$.

(2)当直线AB斜率不存在时，AB方程为$x=\pm 1$，

直线CD过AB中点，即为x轴，得$|AB|=2$，$|CD|=2\sqrt{3}$，$S_{ACBD}=\frac{1}{2}|AB||CD|=2\sqrt{3}$

当直线AB斜率存在时，设其方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}x^2+2y^2=3\\ y=kx+m\end{cases}$可得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-3=0$则$\Delta=4(6k^2-2m^2+3)>0$①

$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$②， $x_1x_2=\frac{2m^2-3}{2k^2+1}$③

以AB为直径的圆过原点即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$

化简可得$(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

代入②③两式，整理得$(k^2+1)(2m^2-3)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)=0$即$m^2=k^2+1$④

将④式代入①式，得$\Delta=4(4k^2+1)>0$恒成立则$k\in\mathbf{R}$

设线段AB中点为M，由$\overrightarrow{OC}=t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=2t\overrightarrow{OM}$，不妨设$t>0$,得$S_{ACBD}=2S_{OACB}=4tS_{OAB}$，

又$\because S_{OAB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=|m|\frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}$，$\therefore S_{ACBD}=4t|m|\frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}$ 又由$\overrightarrow{OC}=t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$，则$C$点坐标为

$(t(x_1+x_2),t(y_1+y_2))$，化简可得$\begin{cases}t(x_1+x_2)=-\frac{4km}{2k^2+1}t\\ t(y_1+y_2)=-\frac{2m}{2k^2+1}t\end{cases}$，代回椭圆方程可得$\frac{8m^2t^2}{2k^2+1}=3$ 即 $t=\sqrt{\frac{3(2k^2+1)}{8m^2}}$

3 / 4

则$S_{ACBD}=4tS_{OAB}=4\sqrt{\dfrac{3(2k^2+1)}{8m^2}}|m|\dfrac{\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}=\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{4k^2+1}{2k^2+1}}=\sqrt{6}\sqrt{2-\dfrac{1}{2k^2+1}}<2\sqrt{3}$，

综上，四边形$ACBD$面积的最大值为$2\sqrt{3}$.

22.解：(1)要证明$f(x-1)\le 2\sqrt{x}-3$，只要证明$\ln x\le 2\sqrt{x}-2$设$\varphi(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x,x>0$，

则$\varphi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$，令$\varphi'(x)<0$，则$0<x<1$；令$\varphi'(x)>0$，则$x>1$，

所以$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，所以$\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，即$\therefore 2\sqrt{x}-2-\ln x\ge 0$，

即$\ln x-1\le 2\sqrt{x}-3$，即$f(x-1)\le 2\sqrt{x}-3$.

(2)由题可得$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}ax^2-x$，令$h(x)=g'(x)=\ln(x+1)-ax,x>0$，则$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$，

①当$a\le 0$时，$h'(x)>0$，$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$g'(x)>g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，无最大值，不符合题意，

②当$a\ge 1$时，$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a<1-a\le 0,g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$g'(x)<g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，无最大值，不符合题意.

③当$0<a<1$时，由$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a=0$，可得$x=\dfrac{1}{a}-1>0$，

$\therefore x\in\left(0,\dfrac{1}{a}-1\right),h'(x)>0$，$g'(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}-1\right)$上单调递增，$x\in\left(\dfrac{1}{a}-1,+\infty\right),h'(x)<0$，$g'(x)$在$\left(\dfrac{1}{a}-1,+\infty\right)$上单调递减；由（1）知：$\ln x\le 2(\sqrt{x}-1)$.

所以当$x>0$时，$h(x)<2\sqrt{x+1}-2-ax<2\sqrt{x+1}-a(x+1)=\sqrt{x+1}(2-a\sqrt{x+1})$.

取$t=\dfrac{4}{a^2}-1$，则$t>\dfrac{1}{a}-1$，且$h(t)<\sqrt{t+1}(2-a\sqrt{t+1})=0$. …

又$h\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>h(0)=0$，所以由零点存在性定理，存在$x_0\in\left(\dfrac{1}{a}-1,t\right)$，使得$h(x_0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，即$g'(x)>0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减，$g(x)$在$(0,+\infty)$上存在最大值$g(x_0)$，符合题意.

综上，实数a的取值范围为$(0,1)$.