理 科 数 学

一、单选题

1．下列集合关系中错误的是（　）

A．$\{(a,b)\}\subseteq\{a,b\}$　　B．$\{0,2\}\subseteq Z$　　C．$\varnothing\subseteq\{0\}$　　D．$\{0,1\}\subseteq\{1,0\}$

2．规定运算$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，若复数$z$满足$\begin{vmatrix}z & 1-i\\ 1+i & 1\end{vmatrix}=i$，则z的值为（　）

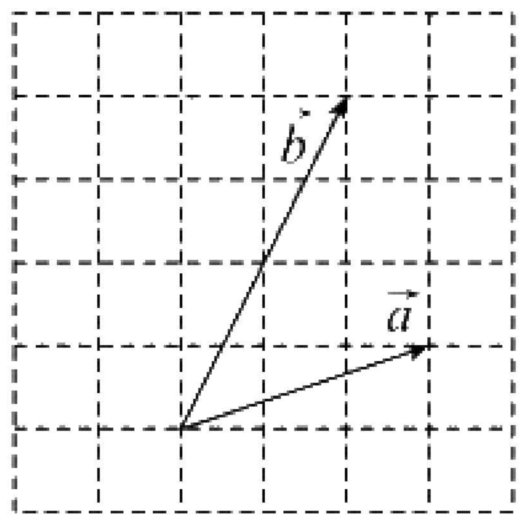
A．1-i　　B．1+i　　C．2-i　　D．2+i

3．数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2},n\in N^*$，则$a_2$等于（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$

4．2022年第二十二届足球世界杯在卡塔尔举行，第一届世界杯是1930年举办的，而早在战国中期，中国就有过类似的体育运动项目：蹴鞠，又名蹴球，蹴圆，筑球，踢圆等，蹴有用脚蹴、踢、蹋的含义，鞠最早系外包皮革、内实米糠的球.因而蹴鞠就是指古人以脚蹴、蹋、踢皮球的活动，类似于今日的足球.2006年5月20日，蹴鞠作为非物质文化遗产经国务院批准已列入第一批国家非物质文化遗产名录.已知半径为3的某鞠（球）的表面上有四个点A，B，C，P，$AC\perp BC$，$AC=BC=4$，$PC=6$，则该鞠（球）被平面PAB所截的截面圆面积为（　）

A．7π　　B．$\dfrac{23}{3}\pi$　　C．8π　　D．$\dfrac{25}{3}\pi$



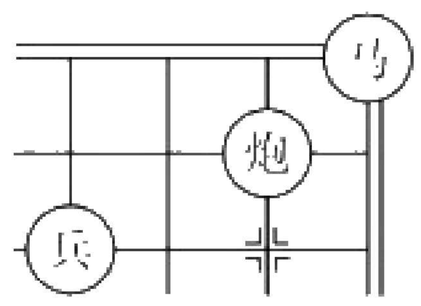
5．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$在正方形网格中的位置如图所示，那么向量$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角为（　）

A．$45°$　　B．$60°$

C．$90°$　　D．$135°$

6．在平面直角坐标系xOy中，α为第四象限角，角α的终边与单位圆O交于点$P(x_0,y_0)$，若$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$y_0=$（　）

A．$\dfrac{-\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$　　C．$\dfrac{-\sqrt{6}-3}{6}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}-3}{6}$



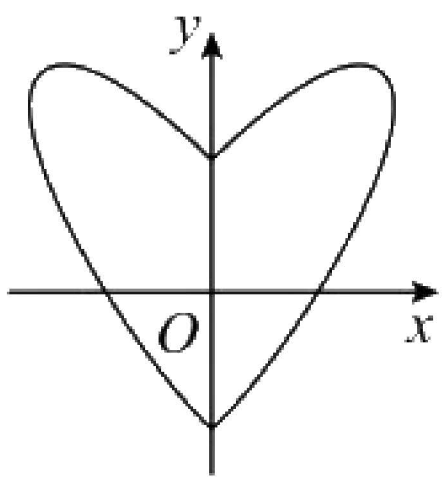
7．我国象棋源远流长，历史悠久．银川市街头某个残局的一部分如图所示，若不考虑这部分以外棋子的影响，且“马”和“炮”不动，“兵”只能往前走或左右走，每次只能走一格，从“兵”吃掉“马”的最短路线中随机选择一条路线，则能顺带吃掉“炮”的可能路线有（　）

A．10条 B．8条　C．6条　D．4条

8．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{1}{2n(n+1)}$，数列$\{a_n\}$的前n项和为T_n，若$T_n>\dfrac{n\lambda}{n^2+4n+19}(\lambda\in\mathbf{R})$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则$\lambda$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,4)$　　B．$(-\infty,2\sqrt{5})$　　C．$(-\infty,5)$　　D．$(-\infty,6)$

9．天鹅被人类称为美善天使，它不仅象征着忠诚、长久的爱情，同时它的生命力很顽强，因此也是坚强的代表．除此之外，天鹅还是高空飞翔冠军，飞行高度可达9千米，能飞越世界最高山峰"珠穆朗玛峰"．如图是两只天鹅面对面比心的图片，其中间部分可抽象为如图所示的轴对称的心型曲线．下列选项中，两个函数的图象拼接在一起后可大致表达出这条曲线的是（　）

A．$y=|x|+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$及$y=|x|-\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$　　B．$y=x+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$及$y=x-\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$

C．$y=|x|+\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}$及$y=|x|-\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}$　　D．$y=x+\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}$及$y=x-\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}$

10．已知抛物线$y^2=16x$上一点$A(m,n)$到准线的距离为5，F是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的左焦点，$P$是双曲线右支上的一动点，则$|PF|+|PA|$的最小值为（　）

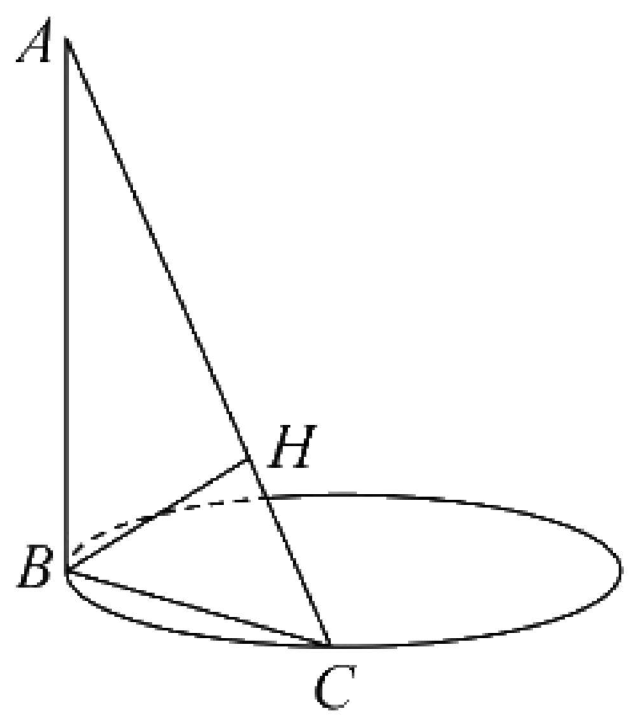
A．12　　B．11　　C．10　　D．9

11．已知函数$f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，则关于x的不等式$f(x^2-2x)+f(x-2)<0$的解集为（　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-2,1)$

C．$(2,+\infty)\cup(-\infty,-1)$　　D．$(1,+\infty)\cup(-\infty,-2)$

12．已知线段AB垂直于定圆所在的平面，B,C是圆上的两点，H是点B在AC上的射影，当C运动，点H运动的轨迹（　）



A．是圆　　B．是椭圆　　C．是抛物线　　D．不是平面图形

二、填空题

13．从-2，-1，1，2，3这5个数中任取2个不同的数，记"两数之积为正数"为事件A，"两数均为负数"为事件B．则$P(B|A)=$________．

14．$\int_{2023}^{2023}\left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\sin x\right]dx=$________．

15．有如下四个命题：

①甲乙两组数据分别为甲：1，2，3，4，5，6，7，8，9；乙：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10.则甲乙的中位数分别为5和5.5.

②相关系数$r=-0.88$，表明两个变量的相关性较弱.

③若由一个2×2列联表中的数据计算得k^2的观测值约为4.567，则认为两个变量有关，此推断犯错误的概率不超过0.05.

附：

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

④用最小二乘法求出一组数据$\left(x_i,y_i\right)\left(i=1,2,\cdots,n\right)$的回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$后要进行残差分析，相应数据$\left(x_i,y_i\right)\left(i=1,2,\cdots,n\right)$的残差是指$\hat{e}_i=y_i-\left(\hat{b}x_i+\hat{a}\right)$.

以上命题错误的序号是__________.

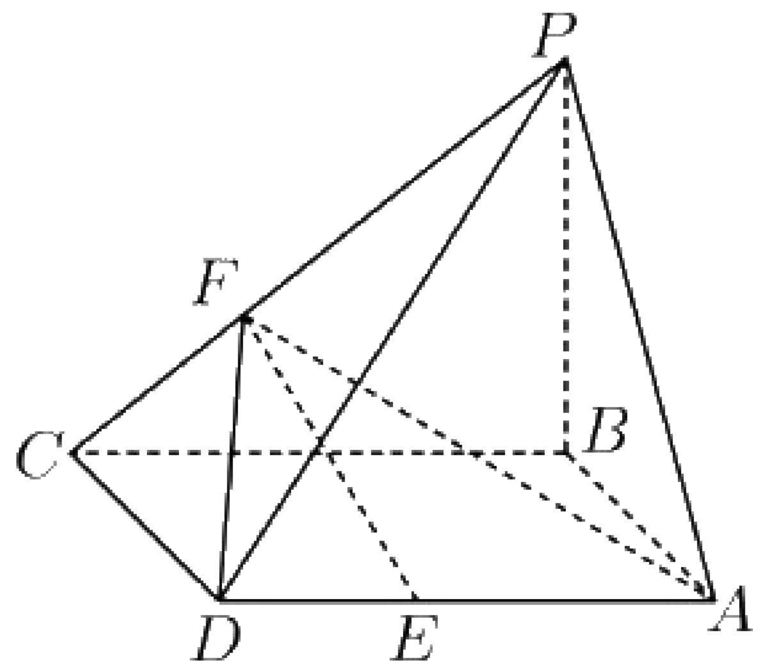
16．设$k\in\mathbf{N}^*$，且$k<\log_2 3+\log_3 4<k+1$，则$k=$__________.

二、解答题

17．如图所示，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是矩形，$PB\perp$底面$ABCD$，$AB=BC=3$，$BP=3$，$CF=\frac{1}{3}CP$，$DE=\frac{1}{3}DA$.

(1)证明：直线EF平行于平面ABP；

(2)求直线PC与平面ADF所成角的正弦值.



18．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

（1）写出余弦定理（只写出一个公式即可），并加以证明；

（2）若锐角$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{15}$，且$c\sin A=2a\sin B$，$b=2$，求$\triangle ABC$的周长.

19．为保护未成年人身心健康，保障未成年人合法权益，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义建设者，《未成年人保护法》针对监护缺失、校园欺凌、烟酒损害、网络沉迷等问题，进一步压实监护人、学校、住宿经营者及网络服务提供者等主体责任，加大对未成年人的保护力度．某中学为宣传《未成年人保护法》，特举行一次未成年人保护法知识竞赛，比赛规则是：两人一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答两题，若答对题数不少于 3，则被称为"优秀小组"，已知甲、乙两位同学组成一组，且同学甲和同学乙答对每道题的概率分为 p_1， p_2．

(1)若 $p_1=\frac{3}{4}$， $p_2=\frac{2}{3}$，则在第一轮竞赛中，求他们获"优秀小组"的概率；

(2)当 $p_1+p_2=\frac{6}{5}$，且每轮比赛互不影响时，如果甲、乙同学在此次竞赛活动中要想获得"优秀小组"的次数为 9，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

20．在直角坐标系 xOy 上，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F\left(\sqrt{3},0\right)$，C 的上、下顶点与 F 连成的三角形的面积为 $\sqrt{3}$．

(1)求 C 的方程；

(2)已知过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点，问 C 上是否存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$？若存出，求出 l 的方程．若不存在，请说明理由

21．已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x+\frac{a}{x}$， $g\left(x\right)=2xe^x-\ln x-x-\ln 2$．

(1)若直线 $y=x$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的一条切线，求 a 的值；

(2)若对于任意的 $x_1\in\left(0,+\infty\right)$，都存在 $x_2\in\left(0,+\infty\right)$，使 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)$ 成立，求 a 的取值范围．

选做题：

22．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-t \\ y=\sqrt{3}-t \end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$．

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C_1 的直角坐标方程；

(2)在直角坐标系中，若把曲线 C_1 图象向下平移 2 个单位，然后横坐标不变，纵坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$，得到曲线 C_2，直线 l 与曲线 C_2 交于点 M、N，与 x 轴交于点 P，求 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$ 的值．

23．已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-3|$．

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 2x$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)\leq\frac{1}{2}a+5$ 的解集非空，求 a 的取值范围．