2022 北京朝阳高三二模

数　　学

2022.5

（考试时间 120 分钟满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项

（1）设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|x>2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{1,2\}$　　（B）$\{3,4\}$　　（C）$\{2,3,4\}$　　（D）$\{1,2,3,4\}$

（2）在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=x$，则 C 的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

（4）已知角 α 的终边经过点 $P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则 $\sin 2\alpha=$

（A）$-\dfrac{24}{25}$　　（B）$-\dfrac{7}{25}$　　（C）$\dfrac{7}{25}$　　（D）$\dfrac{24}{25}$

（5）过点（1,2）作圆 $x^2+y^2=5$ 的切线，则切线方程为

（A）$x=1$　　（B）$3x-4y+5=0$

（C）$x+2y-5=0$　　（D）$x=1$ 或 $x+2y-5=0$

（6）“$m>n>0$”是“$(m-n)(\log 2m-\log 2n)>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知 l，m 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，下面正确的结论是

（A）若 $l//\alpha$，$m//\alpha$，则 $l//m$　　（B）若 $m//\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$

（C）若 $l\perp\alpha$，且 $l\perp m$，则 $m//\alpha$　　（D）若 $l\perp\beta$，$m\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则 $l\perp\alpha$

（8）IS0216 是国际标准化组织所定义的纸张尺寸国际标准，该标准定义了 A,B 系列的纸张尺寸。设型号为 A0，A1，A2，A3，A4，A5，A6 的纸张的面积分别是 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$，它们组成一个公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比

数列，设型号为B1，B2，B3，B4，B5，B6的纸张的面积分别是b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6，已知$b_i^2=a_{i-1}a_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则$\dfrac{a_4}{b_5}$的值为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（9）已知M为$\triangle ABC$所在平面内的一点，$|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|=1$，且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=-\dfrac{1}{2}$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$

（A）0　　（B）1　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）3

（10）某工厂产生的废气经过滤后排放，过滤过程中废气的污染物含量P（单位：mg/L）与时间t（单位：h）间的关系为$P=P_0e^{-kt}$，其中P_0，k是正的常数。如果在前10h污染物减少19%，那么再过5h后污染物还剩余

（A）40．5%　　（B）54%　　（C）65.6%　　（D）72.9%

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。把答案填在答题卡上

（11）抛物线$y^2=4x$的准线方程是__________.

（12）在$(x+\sqrt{x})^5$的展开式中，x^3的系数是__________.（用数字作答）

（13）已知$\triangle ABC$的三个角A,B,C的对边分别为a,b,c，则能使$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$成立的一组$A,B$的值是__________.

（14）“杨辉三角”是数学史上的一个伟大成就。在如图所示的“杨辉三角”中，去掉所有的数字1，余下的数逐行从左到右排列，得到数列$\{a_n\}$为2,3,3,4,6,4,5,10,…，则数列$\{a_n\}$的前10项和为__________；若$a_m=10$，$m\in\mathbf{N}^*$，则m的最大值为__________.

（15）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G分别为棱A_1A,A_1B_1,A_1D_1上的点（与正方体顶点不重合），过A_1作$A_1H\perp$平面EFG，垂足为H．设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，给出以下四个结论：

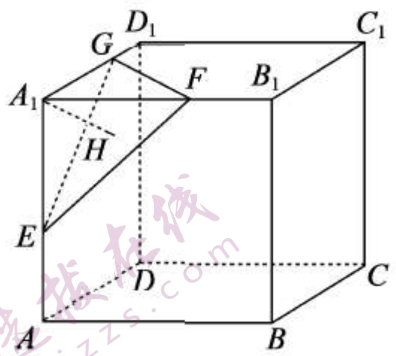
①若E,F,G分别是A_1A,A_1B_1,A_1D_1的中点，则$A_1H=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

②若 E,F,G 分别是 A_1A, A_1B_1, A_1D_1 的中点，则用平行于平面 EFG 的平面去截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，得到的截面图形一定是等边三角形；

③ $\triangle EFG$ 可能为直角三角形；

④ $\dfrac{1}{A_1E^2}+\dfrac{1}{A_1F^2}+\dfrac{1}{A_1G^2}=\dfrac{1}{A_1H^2}$.

其中所有正确结论的序号是__________.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0,m\in\mathbf{R})$。再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择能确定函数 $f(x)$ 的解析式的两个作为已知。

（I）求 $f(x)$ 的解析式及最小值；

（II）若函数 $f(x)$ 在区间[0, t](t>0)上有且仅有 1 个零点，求 t 的取值范围。

条件①：函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

条件 2：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,\dfrac{1}{2})$；

条件③：函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一组解答计分.

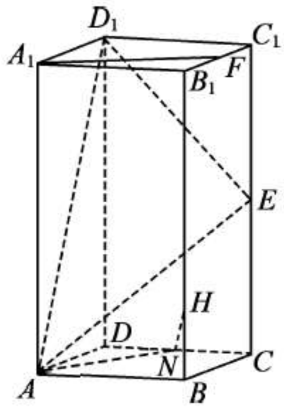
（17）（本小题 14 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$DD_1=4, E,F$ 分别是 CC_1, B_1C_1，的中点，

（I）求证：A_1F // 平面 AED_1；

（II）设 H 在棱 BB_1 上，且 $BH=\dfrac{1}{4}BB_1$，N 为 CD 的中点，求证：

$NH\perp$ 平面 AED_1；并求直线 AN 与平面 AED_1，所成角的正弦值.



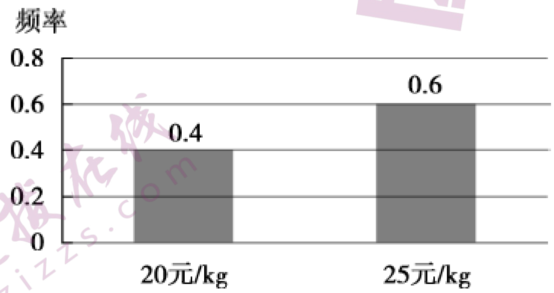
（18）（本小题 13 分）

为实现乡村的全面振兴，某地区依托乡村特色优势资源，鼓励当地农民种植中药材，批发销售。根据前期分析多年数据发现，某品种中药材在该地区各年的平均每亩种植成本为 5000 元，此品种中药材在该地区各年的平均每亩产量与此品种中药材的国内市场批发价格均具有随机性，且互不影响，其具体情况如下表：

该地区此品种中药材各年的平均每亩产量情况

各年的平均每亩产量	400kg	500kg
频率	0.25	0.75

此品种中药材的国内市场批发价格情况



（注：各年的平均每亩纯收入=各年的平均每亩产量×批发价格-各年的平均每亩种植成本）

（I）以频率估计概率，试估计该地区某农民 2022 年种植此品种中药材获得最高纯收入的概率；

（II）设该地区某农民 2022 年种植此品种中药材的平均每亩纯收入为 X 元，以频率估计概率，求 X 的分布列和数学期望；

（III）已知该地区某农民有一块土地共 10 亩，该块土地现种植其他农作物，年纯收入最高可达到 45000 元，根据以上数据，该农民下一年是否应该选择在这块土地种植此品种中药材？说明理由。

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $P(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）过点 P 作斜率为 k_1 的直线 l_1 交椭圆 C 于另一点 A，过点 P 作斜率为 $k_2(k_2\neq k_1)$ 的直线 l_2 交椭圆 C 于另一点 B . 若 $k_1k_2=1$，求证：直线 AB 经过定点.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$.

（I）当 $x\in(0,\pi)$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）设函数 $g(x)=-x^2+2ax$ 若对任意 $x_1\in[-\pi,\pi]$，存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $\frac{1}{2\pi}f\left(x_1\right)\leqslant g\left(x_2\right)$ 成立，求实数 a 的取值范围。

（21）（本小题 15 分）

已知集合 $A=\left\{\alpha\middle|\alpha=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right),x_i\in\mathbf{N},i=1,2,3,4\right\}$. 对集合 A 中的任意元素 $\alpha=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$，定义 $T(\alpha)=\left(\left|x_1-x_2\right|,\left|x_2-x_3\right|,\left|x_3-x_4\right|,\left|x_4-x_1\right|\right)$，当正整数 $n\geq 2$ 时，定义 $T^n(\alpha)=T\left(T^{n-1}(\alpha)\right)$ $\left(约定 T^1(\alpha)=T(\alpha)\right)$.

（I）若 $\alpha=(2,0,2,1),\beta=(2,0,2,2)$，求 $T^4(\alpha)$ 和 $T^4(\beta)$；

（II）若 $\alpha=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 满足 $x_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,4)$ 且 $T^2(\alpha)=(1,1,1,1)$，求 α 的所有可能结果；

（III）是否存在正整数 n 使得对任意 $\alpha=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in A\left(x_1\geqslant x_2\geqslant x_4\geqslant x_3\right)$ 都有 $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$？若存在，求出 n 的所有取值；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	A	A	C	A	D	C	D	D

二、填空题：（本题满分 25 分）

题号	11	12	13	14		15
答案	$x=-1$	5	$A=B=\frac{\pi}{6}$ （答案不唯一）	52	45	①④

三、解答题：（本题满分 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：由题可知，$f(x)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x+m+\frac{1}{2}$$

$$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+m+\frac{1}{2}.$$

选择①②：

（I）因为$T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$.

又因为 $f(0)=1+m=\frac{1}{2}$，所以 $m=-\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=-1$.

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 -1． ....9 分

（II）令 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$，

则 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=1,2$ 时，函数 $f(x)$ 的零点为 $\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}$，

由于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上有且仅有 1 个零点，

所以 $\frac{5\pi}{12}\leqslant t<\frac{11\pi}{12}$.

所以 t 的取值范围是 $[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12})$． ....13 分

选择①③：

（I）因为 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$．

又因为函数 $f(x)$ 的最大值为 $m+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，

所以 $m=0$．

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$．

当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，

$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=-1$，

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$． ....9 分

（II）令 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=0$，

则 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{7}{6}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，或 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{11}{6}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，或 $x=k\pi+\frac{5}{6}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

当 $k=0$ 时，函数 $f(x)$ 的零点分别为 $\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}$，

由于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上有且仅有 1 个零点，

所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant t<\frac{5\pi}{6}$．

所以 t 的取值范围是 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$． ....13 分

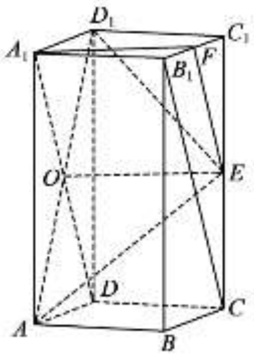
（17）（本小题 14 分）

解：（I）连接 A_1D，设 $A_1D\cap AD_1=O$，连接 OE，EF，B_1C．

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $A_1B_1/\!/CD$，且 $A_1B_1=CD$，

所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形.

所以 $A_1D/\!/B_1C$，且 $A_1D=B_1C$．



因为 E，F 分别是 CC_1，B_1C_1 的中点，

所以 $FE/\!/B_1C$，且 $FE=\frac{1}{2}B_1C$．

在矩形 A_1ADD_1 中，O 是 A_1D 的中点，

所以 $A_1O/\!/FE$，且 $A_1O=FE$．

所以四边形 A_1OEF 是平行四边形.

所以 $A_1F // OE$.

因为 $A_1F \not\subset$ 平面 AED_1 , $OE \subset$ 平面 AED_1 ,

所以 $A_1F //$ 平面 AED_1 . ... 5 分

（II）建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

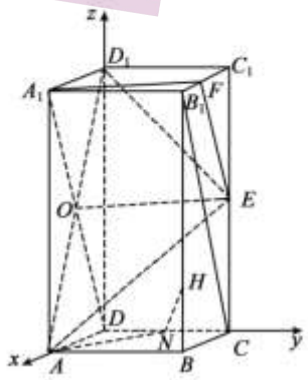
则 $D(0,0,0)$ ， $A(2,0,0)$ ， $D_1(0,0,4)$ ，

$E(0,2,2)$ ， $H(2,2,1)$, $N(0,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,4)$ ， $\overrightarrow{D_1E}=(0,2,-2)$.

设平面 AED_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+4z=0,\\ 2y-2z=0.\end{cases}$



令 $z=1$，则 $x=2$， $y=1$.

所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$.

因为 $\overrightarrow{NH}=(2,1,1)$ ，

所以 $\overrightarrow{NH}=\boldsymbol{m}$.

所以 $NH\perp$ 平面 AED_1 .

因为 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$ ， $\overrightarrow{NA}=(2,-1,0)$.

设 AN 与平面 AED_1 所成角为 θ ， 则

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{NA},\boldsymbol{m}>|=\frac{|\overrightarrow{NA}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{NA}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|4-1+0|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

即 AN 与平面 AED_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$ . ... 14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（I）设事件 A：该地区某农民 2022 年种植此品种中药材获得最高纯收入.

所以 $P(A)=0.75\times0.6=0.45$ . ... 3 分

（II）由题意可知， X 的所有可能取值为 3000，5000，7500.

$P(X=3000)=0.25\times0.4=0.1$ ，

$P(X=5000)=0.75\times0.4+0.25\times0.6=0.45$ ，

$P(X=7500)=0.75\times0.6=0.45$.

所以 X 的分布列为

X	3000	5000	7500
P	0.1	0.45	0.45

所以 X 的数学期望 $E(X)=3000\times0.1+5000\times0.45+7500\times0.45=5925$.

.... 10 分

（III）选择种植此品种中药材.理由如下：

以第（II）问的期望作为决策依据，

则种植 10 亩中药材年纯收入为$5925\times10=59250>45000$，

所以该农民下一年应该选择在这块土地种植此品种中药材．…………………13 分

参考 1：

选择种植此品种中药材.理由如下：

由（II）知种植中药材纯收入高于 45000 元的概率为 0.45+0.45=0.90，比纯收入低于 45000 元的概率要大，所以该农民下一年可以选择在这块土地种植此品种中药材．

参考 2：

不选择种植此品种中药材.理由如下：

由（II）知种植中药材收入高于 45000 元的概率为 0.45+0.45=0.90，纯收入低于 45000 元的概率虽只有 0.1，但概率小的事件也可能发生，所以该农民下一年可以不选择在这块土地种植此品种中药材．

（其他解答酌情给分）

（19）（本小题 15 分）

解：（I）由题意知 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{2}$， $b=1$．

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ………………………………………………………4 分

（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$， $x_1\neq0$， $x_2\neq0$，

则 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1}$， $k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2}$，

若 $x_1=x_2$，则 $y_1=y_2$ 或 $y_1=-y_2$．

当 $x_1=x_2$， $y_1=y_2$ 时， $k_1=k_2$，不合题意，

当 $x_1=x_2$， $y_1=-y_2$ 时， $k_1k_2=\dfrac{1}{2}\neq1$，不合题意．

所以直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$．

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

$\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=8(2k^2-m^2+1)>0$．

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，且 $m^2\neq1$．

因为 $k_1k_2=1$，

所以 $\dfrac{y_1-1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2-1}{x_2}=1$，即 $\dfrac{(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)}{x_1x_2}=1$，

所以 $(k^2-1)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=0$，

所以$(k^2-1)\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}+k(m-1)(-\dfrac{4km}{1+2k^2})+(m-1)^2=0$，

所以$(m-1)(-m-3)=0$，

所以$m=-3$或$m=1$（舍）.

所以直线AB经过定点$(0,-3)$．..15分

（20）（本小题15分）

解：（I）因为$f(x)=x\sin x+\cos x$，

所以$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$．

当$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如表所示：

x	$(0,\dfrac{\pi}{2})$	$\dfrac{\pi}{2}$	$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	单调递增	$\dfrac{\pi}{2}$	单调递减

所以当$x\in(0,\pi)$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,\dfrac{\pi}{2})$，

函数$f(x)$的单调递减区间为$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$．..6分

（II）当$x\in[-\pi,\pi]$时，$f(-x)=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数.

所以当$x\in[-\pi,\pi]$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$，$(0,\dfrac{\pi}{2})$，

函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\dfrac{\pi}{2},0)$，$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，

所以函数$f(x)$的最大值为$f(-\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$．

设$h(x)=\dfrac{1}{2\pi}f(x)$，则当$x\in[-\pi,\pi]$时，$h(x)_{\max}=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{4}$．

对任意$x_1\in[-\pi,\pi]$，存在$x_2\in[0,1]$，使得$h(x_1)\leqslant g(x_2)$成立，

等价于$h(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$．

（1）　当$a\leqslant 0$时，函数$g(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为$g(0)=0$，不合题意.

（2）　当$0<a<1$时，函数$g(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为$g(a)=a^2$，

则$a^2\geqslant\dfrac{1}{4}$，解得$a\geqslant\dfrac{1}{2}$或$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{1}{2}\leqslant a<1$.

（3）　当$a\geqslant 1$时，函数$g(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为$g(1)=2a-1$，

则$2a-1\geqslant\dfrac{1}{4}$，解得$a\geqslant\dfrac{5}{8}$，

所以$a\geqslant 1$.

综上所述，a 的取值范围是$[\frac{1}{2},+\infty)$． .... 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（I）当 $\alpha=(2,0,2,1)$ 时，

$T(\alpha)=(2,2,1,1)$，$T^2(\alpha)=(0,1,0,1)$，

$T^3(\alpha)=(1,1,1,1)$，$T^4(\alpha)=(0,0,0,0)$；

当 $\beta=(2,0,2,2)$ 时，

$T(\beta)=(2,2,0,0)$，$T^2(\beta)=(0,2,0,2)$，

$T^3(\beta)=(2,2,2,2)$，$T^4(\beta)=(0,0,0,0)$． .... 4 分

（II）因为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，所以 $T(\alpha)=(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,|x_3-x_4|,|x_4-x_1|)$，

又因为 $T^2(\alpha)=(1,1,1,1)$，所以

$$\begin{cases}||x_1-x_2|-|x_2-x_3||=1,\\ ||x_2-x_3|-|x_3-x_4||=1,\\ ||x_3-x_4|-|x_4-x_1||=1,\\ ||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=1.\end{cases}$$

因为 $x_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,4)$，

当 $x_1=0$ 时，$||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=|x_4-x_2|=1$，

当 $x_1=1$ 时，$||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=|(1-x_4)-(1-x_2)|=|x_2-x_4|=1$．

同理，当 $x_2=0$ 或 1 时，都有 $||x_1-x_2|-|x_2-x_3||=|x_1-x_3|=1$；

当 $x_3=0$ 或 1 时，都有 $||x_2-x_3|-|x_3-x_4||=|x_2-x_4|=1$；

当 $x_4=0$ 或 1 时，都有 $||x_3-x_4|-|x_4-x_1||=|x_3-x_1|=1$．

所以 $\begin{cases}||x_1-x_2|-|x_2-x_3||=1,\\ ||x_2-x_3|-|x_3-x_4||=1,\\ ||x_3-x_4|-|x_4-x_1||=1,\\ ||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=1\end{cases}$ 等价于 $\begin{cases}|x_1-x_3|=1,\\ |x_2-x_4|=1.\end{cases}$

所以 $x_1\neq x_3$，$x_2\neq x_4$．

当 $x_1=0,x_2=0$ 时，经检验 $\alpha=(0,0,1,1)$ 符合题意，

当 $x_1=0,x_2=1$ 时，经检验 $\alpha=(0,1,1,0)$ 符合题意，

当 $x_1=1,x_2=0$ 时，经检验 $\alpha=(1,0,0,1)$ 符合题意，

当 $x_1=1,x_2=1$ 时，经检验 $\alpha=(1,1,0,0)$ 符合题意．

所以 α 的所有可能结果为 $(0,0,1,1)$，$(0,1,1,0)$，$(1,0,0,1)$，$(1,1,0,0)$． .... 10 分

（III）存在正整数 n 使得 $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$，

且 n 的所有取值为 $\left\{n\in\mathbf{N}^*\,\middle|\,n\geqslant 6\right\}$.理由如下：

若 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A$ 满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_4\geqslant x_3$，

则 $T(\alpha)=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_4-x_3,x_1-x_4)$，

$T^2(\alpha)=(|x_1+x_3-2x_2|,x_2-x_4,|x_1+x_3-2x_4|,x_2-x_4)$.

设 $a=|x_1+x_3-2x_2|$， $b=|x_1+x_3-2x_4|$，

则 $T^3(\alpha)=(|x_2-x_4-a|,|x_2-x_4-b|,|x_2-x_4-b|,|x_2-x_4-a|)$.

设 $c=||x_2-x_4-a|-|x_2-x_4-b||$，

则 $T^4(\alpha)=(c,0,c,0)$， $T^5(\alpha)=(c,c,c,c)$， $T^6(\alpha)=(0,0,0,0)$.

所以，对满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_4\geqslant x_3$ 的任意 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A$，都有 $T^6(\alpha)=(0,0,0,0)$.

当正整数 $n\geqslant 7$ 时， $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$.

当 $\alpha=(6,3,1,2)$ 时，

$T(\alpha)=(3,2,1,4)$， $T^2(\alpha)=(1,1,3,1)$，

$T^3(\alpha)=(0,2,2,0)$， $T^4(\alpha)=(2,0,2,0)$，

$T^5(\alpha)=(2,2,2,2)$， $T^6(\alpha)=(0,0,0,0)$.

所以 n 的所有取值为 $\{n\in\mathbf{N}^*\mid n\geqslant 6\}$. .... 15 分