# 渭南市 2023 年高三教学质量检测（II）
# 数学试题（文科）参考答案

一．选择题（每小题 5 分，共 60 分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | C | A | C | A | A | C | C | B | A | D | B |

二．填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 7 ；　　　　14. $\frac{8}{3}$ ；

15. $\frac{2023}{4047}$ ；　　　　16. $(0,2)$ ，$(6-2\sqrt{21},0)$（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题（共 70 分）

17. 解：（1）联结 $BC$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得，

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{16+12-2\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2,$$

所以 $\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\times2\times\pi\times1=\pi$，即 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 $\pi$ (km)；…………………………6 分

（2）记 $AD=a$，$CD=b$，则在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得：

$a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=16$，即 $a^2+b^2-ab=16$，……………………8 分

从而 $(a+b)^2=16+3ab\le16+3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

所以 $\frac{1}{4}(a+b)^2\le16$，$a+b\le8$，当且仅当 $a=b=4$ 时，等号成立；…………10 分

新建健康步道 $A-D-C$ 的最长路程为 8(km)，

故新建的健康步道 $A$-$D$-$C$ 的路程最多可比原有健康步道 $A$-$B$-$C$ 的路程增加 $8-\pi-2\sqrt{3}$ (km)． …..12 分

18. 解：(1) 由题可知，落在区间 $[25,40)$，$[40,55)$，$[55,70)$，$[70,85)$，$[85,100]$ 的频率分别为：

$\frac{1}{20},\frac{2}{25},\frac{17}{100},\frac{7}{20},\frac{7}{20}$，……………………………………………3 分

这 200 位顾客所打分数的平均值为：

$\frac{1}{20}\times 32.5+\frac{2}{25}\times 47.5+\frac{17}{100}\times 62.5+\frac{7}{20}\times 77.5+\frac{7}{20}\times 92.5=75.55$ ,

故这 200 位顾客所打分数的平均值为 75.55． ……………………………6 分

(2)根据所给数据，可得 $2\times 2$ 列联表：

| | 满意 | 不满意 |
|---|---|---|
| 男性顾客 | 80 | 20 |
| 女性顾客 | 60 | 40 |

根据列联表得 $K^2=\frac{200\times(80\times 40-20\times 60)^2}{100\times 100\times 140\times 60}\approx 9.524$ ．………………………10 分



因为 $9.524>6.635$ ，所以有 99% 的把握认为顾客对公司服务质量的态度与性别有关．……………………………………………12 分

19．解（1）因为 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

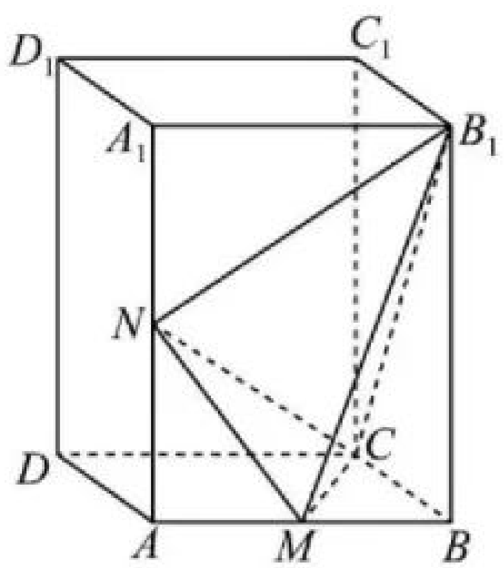
且 $M$，$N$ 分别为 $AB$，$AA_1$ 的中点，则 $CM\perp AB$，……………2 分

又因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，则 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $CM\subset$ 平面 $ABCD$，则 $CM\perp AA_1$，

且 $AB\cap AA_1=A$，所以 $CM\perp$ 平面 $B_1MN$， ……………………5 分

又因为 $CM\subset$ 平面 $B_1MC$，所以平面 $B_1MC\perp$ 平面 $B_1MN$． ……………………6 分

（2）




因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2$，$M$，$N$ 分别为 $AB$，$AA_1$ 的中点，

所以$AA_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{3}$，

$B_1M=\sqrt{BM^2+B_1B^2}=3$，$B_1C=\sqrt{BC^2+B_1B^2}=2\sqrt{3}$，$B_1N=\sqrt{A_1B_1^2+A_1N^2}=\sqrt{6}$，

因为底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，所以$CM=\sqrt{3}$，$CN=\sqrt{AC^2+AN^2}=\sqrt{6}$，

由（1）知$B_1N\perp$平面$CMN$，设点$B_1$到平面$CMN$的距离为$h_1$，则$h_1=\sqrt{6}$，..........8分

因为$CN^2=MN^2+CM^2$，所以$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，因为$V_{B_1-CMN}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle CMN}\times h_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，因为$B_1M=3$，

$B_1C=2\sqrt{3}$，$CM=\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle B_1CM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，..............................10分

设点$N$到平面$B_1CM$的距离为$h_2$，

因为$V_{B_1-CMN}=V_{N-B_1CM}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle B_1CM}\times h_2$，所以$\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times h_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，因此$h_2=\sqrt{2}$.

故点$N$到平面$B_1CM$的距离为$\sqrt{2}$........................12分

20. 解：（1）直线 BF 方程为 y=x-1，与椭圆联立可解得 C（$\frac{4}{3}$,$\frac{1}{3}$），

四边形$ABOC$的面积=$S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.........................4分

（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由$k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，有$x_1x_2+2y_1y_2=0$

又 M,N 在椭圆上，有$x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2}=2$，$x_2^{\ 2}+2y_2^{\ 2}=2$......................6分

设点 P$(x,y)$，由题意可得$(x,y)=(x_1,y_1)+2(x_2,y_2)=(x_1+2x_2,y_1+2y_2)$

即$\begin{cases}x=x_1+2x_2\\ y=y_1+2y_2\end{cases}$..........................8分

$$x^2+2y^2=(x_1+2x_2)^2+2(y_1+2y_2)^2$$
$$=(x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2})+4(x_2^{\ 2}+2y_2^{\ 2})+4(x_1x_2+2y_1y_2)=10$$
..........................10分

所以点 P 的轨迹在椭圆$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$上，所以存在两个定点$G(-\sqrt{5},0)$、$H(\sqrt{5},0)$，

使得$|PG|+|PH|$为定值$2\sqrt{10}$ ........................ 12 分

21 解：(1)因为$f'(x)=\ln x-ax$，则$f'(1)=-a$，

又$f(1)=-\frac{a}{2}$，所以在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y+\frac{a}{2}=-a(x-1)$，即$y=-ax+\frac{a}{2}$，

又该切线为$y=-2x+1$，则$-a=-2$且$\frac{a}{2}=1$，所以$a=2$； ...................... 4 分

(2)（$i$）函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

因为函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个不同的极值点$x_1$，$x_2$，

即等价于函数$f'(x)=\ln x-ax$在$(0,+\infty)$内有两个不同的零点$x_1$，$x_2$，

设$h(x)=\ln x-ax$，由$h'(x)=\frac{1-ax}{x}$，

当$a\le 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，至多只有一个零点；

当$a>0$时，在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

所以，当$x=\frac{1}{a}$时，$f'(x)_{\max}=f'\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$，

函数$f'(x)$有两个零点，则必有$f'(x)_{\max}>0$，

即$-\ln a-1>0$，解得$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

又$f'\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$，

易证$\ln x<\sqrt{x}$，证明如下：

令$m(x)=\sqrt{x}-\ln x$，$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$，

当$x\in(0,4)$时，$m'(x)<0$，$m(x)$单减，当$x\in(4,+\infty)$时，$m(x)$单增，

故$m(x)_{\min}=m(4)=2-\ln 2>0$，故$m(x)=\sqrt{x}-\ln x>0$，得证.

$f'(1)=-a<0$，所以$f'(x)$在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$和$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a^2}\right)$上各有一个零点，

故$f'(x)$有两个零点时，$a$的范围为$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$； ............................ 8 分

（$ii$）法 1：由（i）可知$x_1$，$x_2$是$h(x)=\ln x-ax$的两个零点，不防设$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

由 $\ln x_1-ax_1=0$ 且 $\ln x_2-ax_2=0$，得 $a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $x_1+x_2>\frac{m}{a}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-m>0\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}-m>0(*)$

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则 $(*)\Leftrightarrow\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0(**)$， ........................10 分

记 $g(t)=\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0$，$t\in(0,1)$，

由 $g'(t)=\frac{t^2-2(m-1)t+1}{t(t+1)^2}$，令 $p(t)=t^2-2(m-1)t+1$，$0<m\le 2$.

又 $\Delta=4(m-1)^2-4=4m(m-2)\le 0$，则 $p(t)\ge 0$，即 $g'(t)\ge 0$，

所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $g(t)<g(1)=0$，即 $(**)$ 成立.

所以不等式 $x_1+x_2>\frac{m}{a}$ 成立. ..........................................................12 分

法 2：欲证 $x_1+x_2>\frac{m}{a}$，由 $0<m\le 2$，$0<a<\frac{1}{e}$，则只需证：$x_1+x_2>\frac{2}{a}$.

不妨设 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，则 $\ln x_1-ax_1=0$ 且 $\ln x_2-ax_2=0$，

则 $a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

所以 $x_1+x_2>\frac{2}{a}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-2>0\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}-2>0(*)$

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则 $(*)\Leftrightarrow\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0\ (**)$， ........................10 分

记 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$t\in(0,1)$，

由 $g'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\ge 0$，即 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

故 $g(t)<g(1)=0$，即 $(**)$ 成立.

故 $x_1+x_2>\frac{m}{a}$. ..........................................................12 分

22．解：（1）曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\alpha}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}, \end{cases}$ （$\alpha$ 为参数，$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$），

所以 $x^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \dfrac{y^2}{3}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$，所以 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. 即曲线 $C$ 的普通方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ....3 分

直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\rho\left(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，

转换为直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$. ................................5 分

（2）直线 $l$ 过点 $P(2,0)$，直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t, \end{cases}$（$t$ 为参数）令点 $A$，$B$ 对应的参数分别为 $t_1$，$t_2$，

由 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，得 $2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$，则 $t_1+t_2=-3\sqrt{3}$，$t_1t_2=\dfrac{9}{2}$，即 $t_1$、$t_2$ 为负，

故 $\left|\dfrac{1}{|PA|}-\dfrac{1}{|PB|}\right|=\left|\dfrac{1}{|t_1|}-\dfrac{1}{|t_2|}\right|=\left|\dfrac{|t_2|-|t_1|}{|t_1t_2|}\right|=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\dfrac{2}{3}$. ..........10 分

23．解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|+2|x-1|$，

当 $x\le -1$，$f(x)=-3x+1$，$f(x)_{\min}=f(-1)=4$；

当 $-1<x<1$，$f(x)=-x+3$，$f(x)\in(2,4)$；

当 $x\ge 1$，$f(x)=3x-1$，$f(x)_{\min}=f(1)=2$；

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 2. ....................5 分

（2）$a>0$，$b>0$，当 $1\le x\le 2$ 时，

$|x+a|+2|x-1|>x^2-b+1$ 可化为 $a+b>x^2-3x+3$，

令 $h(x)=x^2-3x+3$，$x\in[1,2]$，$h(x)_{\max}=h(1)=h(2)=1$，$\therefore a+b>1$ ..........7 分

$\therefore \left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2=a^2+b^2+a+b+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}+a+b+\dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $a=b$ 时取得等号；

又当 $a+b>1$ 时，$\frac{(a+b)^2}{2}+a+b+\frac{1}{2}>2$，

故 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2>2$ . ......................................10 分