绝密★启用前

浙江强基联盟2023学年第一学期高三年级10月联考数学学科试题

命题人：宁波鄞州高级中学　朱俊波　　　　审题人：平阳鳌江中学　　蔡继大
金华市外国语学校　代云龙　　武义第三中学　邓浩　　　温州育英实验学校　朱　益

本试卷分为第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分，全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生须知：1.答题前，务必核对答题卡上条形码中信息是否与本人一致.

2.选择题用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案编号.

3.非选择题用0.5毫米黑色签字笔在答题卡上书写，在试卷上作答无效.

第I卷(选择题共60分)

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-6x+8<0\right\},B=\left\{x\middle|-1\le x\le 3\right\}$，下列属于 $A\cap B$ 的元素是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2.若复数 $z=\dfrac{2-ai}{2+i}$ 是纯虚数，则实数 $a=$（　　）

A. 2　　B. 4　　C. -2　　D. -4

3.已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则渐近线方程是（　　）

A. $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　B. $y=\pm 2x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

4.已知向量 $\vec{a}=(2,4),\vec{b}=(1,x)$，若 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$(　　)

A. 10　　B. $\sqrt{10}$　　C. 8　　D. $2\sqrt{2}$

5.若函数 $f(x)=\begin{cases}3ax+6,x\le 2\\ a^x+a,x>2\end{cases}$ 是单调递增函数，则实数 a 可取的一个值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

6.近期浙江大学、复旦大学、南京大学三所学校发布了2024年冬令营招生简章，现有甲、乙、丙、丁四位同学报名，每位同学只能选一所大学，每所大学至少有一名同学报名，且甲同学不报南京大学，则不同的报名方法共有(　　)

A. 16 种　　B. 20 种　　C. 24 种　　D. 28 种

7.已知函数 $f(x)=1+\cos 4x+2\sin 2x$，$x\in[0,a]$ 的值域为 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{12},\pi\right]$

8.定义 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\ge b\\b,a<b\end{cases}$.若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\lambda n^2+(20+\lambda)n\left(\lambda\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*\right)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2,2^{n+1}(b_{n+1}-b_n)=b_nb_{n+1}$，令 $c_n=\max\{a_n,b_n\}$，且 $c_n\ge c_3$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是(　　)

A. $[-4,-3]$　　B. $[-3,-2]$　　C. $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[-3,-\frac{2}{3}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.已知 m,n 是两条不重合的直线，α,β 是两个不重合的平面，下列命题正确的是(　　)

A.若 $m//\alpha,m//\beta,n//\alpha,n//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　B.若 $m//n,m//\alpha,n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C.若 $m\perp n,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D.若 $m//n,m\perp\alpha,n\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$

10.下列说法正确的是(　　)

A.若随机变量 X 服从二项分布 $B(6,p)$，且 $E(X)=2$，则 $D(X)=\frac{2}{3}$

B.随机事件 A，B 相互独立，满足 $P(AB)=\frac{5}{9}$，$P(A\overline{B})=\frac{2}{9}$，则 $P(B)=\frac{2}{5}$

C.若 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{2}{3},P(A)=\frac{1}{2}$，则 $P(B)=\frac{1}{2}$

D.设随机变量 X 服从正态分布 $N(3,\sigma),P(X<5)=0.8$，则 $P(1<X<3)=0.3$

11.已知抛物线 $E:y^2=4x$ 上的两个不同的点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 关于直线 $x=ky+4$ 对称，直线 AB 与 x 轴交于点 $C(x_0,0)$，下列说法正确的是(　　)

A. E 的焦点坐标为 $(1,0)$　　B. x_1+x_2 是定值　　C. x_1x_2 是定值　　D. $x_0\in(-2,2)$

12.已知定义在 R 上的函数 $f(2x-2)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，函数 $f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，则下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)=f(-x)$　　B. 8 是函数 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(2)=0$　　D. $f(1+x)+f(1-x)=0$

第II卷(非选择题共 90 分)

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.过圆 $x^2+y^2=1$ 上点 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的切线方程为____________

14.$\left(\dfrac{1}{2x}-x\right)^8$ 展开式中含 x^2 项的系数是____________

15.已知 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3},x\in(0,\pi)$，则 $\sin 2x=$ ____________

16.设 a,b,c 为正数，$a>b$，且 a,b 为一元二次方程 $ax^2-3bx+c=0$ 的两个实根，则 $\dfrac{4c}{b}+\dfrac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为____________

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步聚.

17.(10 分)已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $b\sin C+c\sin B=\sqrt{3}b$

(I)求 C;

(II)若 $c=2$, $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18.(12 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $3S_4=2(a_5+a_8),a_3=3a_1+2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

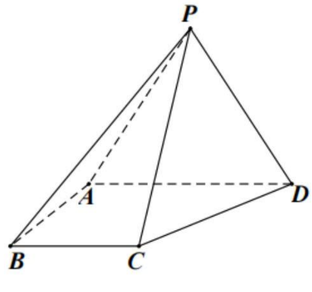
(I)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)若 $b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，令 $c_n=a_nb_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n 的取值范围.

19.(12 分)如图，已知四棱锥 $P-ABCD$，$\triangle PAD$ 是边长为 4 的等边三角形，满足 $AB=2BC=4$，$AB\perp BC$，$BC//AD$.

(I)求证：$PC\perp AD$;

(II)若 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，求二面角 $P-CD-A$ 的余弦值.



20.(12 分)已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^{2}+\left(1-2a\right)x.\left(a\in\mathrm{R}\right)$

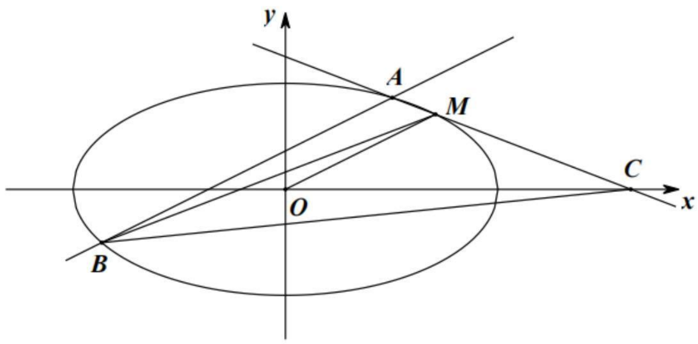
(I)若 $a=1$时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间;

(II)当$0<a\le\dfrac{1}{2}$时，求证：$f\left(x\right)\le\dfrac{1}{2a}-a-1$.

21.(12 分)如图所示，已知椭圆 $E:\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a>b>0\right)$过点 $M\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，且满足 $a=2b$，O 为坐标原点，平行于OM 的直线交椭圆 E 于两个不同的点 A,B .

(I)求椭圆 E 的方程;

(II)直线 AM 与 x 轴交于点 C .证明 $\angle BMC$ 的内角平分线所在直线与 x 轴垂直.



22.(12 分)甲口袋中装有 2 个红球和1个黑球，乙口袋中装有1个红球和2个黑球.现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，称为1次球交换的操作，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中红球个数为 X_{n}.

(I)求 $P\left(X_{1}=1\right)$;

(II)求 X_{2} 的概率分布列并求出 $E\left(X_{2}\right)$;

(III)证明：$E\left(X_{n+1}\right)=1+\dfrac{1}{3}E\left(X_{n}\right)\left(n\ge 2,n\in N^{*}\right)$.