绝密★启用前

智慧上进·2021—2022学年高三一轮复习验收考试

数　学(理)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|3x^2-2x<0\}$,$B=\{x|y=\ln(3x-1)\}$,则 $A\cap B=$

$3x<2$　$0<x<\frac{2}{3}$　$x>\frac{1}{3}$

A. $\{x|x>0\}$　　B. $\{x|0<x<\frac{1}{3}\}$

C. $\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\}$　　D. $\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}\}$

2. 若复数 $\frac{m-2i}{1+3i}$ 为纯虚数,则实数 m 的值为

$\frac{m-2i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{m-6-2i-3mi}{1+9}$ 10

A. 6　　B. -6

C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

3. 已知随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$,且 $P(x<0)\cdot P(x>6)=0.04$,则 $P(0<x<3)=$

$x^2=0.04$
$x=0.2$

A. 0.2　　B. 0.3

C. 0.4　　D. 0.1

4. 标准对数视力表采用的“五分记录法”是我国独创的视力记录方式,此表由14行开口方向各异的正方形“E”形视标所组成,从上到下分别对应视力4.0,4.1,…,5.2,5.3,且从第一行开始往下,每一行“E”形视标边长都是下一行“E”形视标边长的 $\sqrt[10]{10}$ 倍,若视力4.1的视标边长为 a,则视力4.9的视标边长为

$a\cdot\sqrt[10]{10}$

A. $10^{\frac{2}{5}}a$　　B. $10^{-\frac{2}{5}}a$

C. $10^{\frac{4}{5}}a$　　D. $10^{-\frac{4}{5}}a$

5. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$,点 E 在线段 CD 上,若 $\tan\angle CBE=\frac{1}{3}$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=$

A. $12-\sqrt{3}$　　B. 12　　C. 9　　D. 8

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=-3$,公差 $d=4$,则数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的前8项和为

A. 28　　B. 32　　C. 36　　D. 48

7. 对正整数 a，函数 $\varphi(a)$ 表示小于或等于 a 的正整数中与 a 互质的数的数目，此函数以其首位研究者欧拉命名，故称为欧拉函数. 例如：因为 1,3,5,7 均和 8 互质，所以 $\varphi(8)=4$. 基于上述事实，$\varphi\left[\left(\frac{1}{\log_2 10}+2\lg 5+\lg 8-\lg 14\right)^5\right]=$

A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 24

8. 已知双曲线 $C:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{m}=1(m>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1,F_2，若存在点 $M(\lambda,\lambda)$，使得 $|MF_2|-|MF_1|=4$，则实数 m 的取值范围为

A. $(1,+\infty)$　　B. $(1,4)$　　C. $(0,4)$　　D. $(4,+\infty)$

9. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为正方形，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle SAD$ 为等腰三角形，若 E,F 分别为 AB,SC 的中点，则异面直线 EC 与 BF 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{70}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{2(x+1)-5}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$　$(-1,2)$

10. 已知函数 $f(x)=3\sin\pi x+2(x\in[-10,8])$，$g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点坐标依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{16},y_{16})$，则 $\sum_{i=1}^{16}(x_i+y_i)=$ $\sum_{i=1}^{16}x_i+\sum_{i=1}^{16}y_i=$

A. 16　　B. 24　　C. 32　　D. 48

11. 已知函数 $f(x)=\cos x+\cos(\sin x)$，现有如下说法：

①$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；

②$2\pi$ 为 $f(x)$ 的一个周期；

③$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增.

则上述说法中正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，$\angle SCA=\angle SCB=60°$，若三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心 O 恰为线段 SC 的中点，且 $AB=3$，则球 O 的表面积为

A. 32π　　B. 48π　　C. $32\sqrt{6}\pi$　　D. 64π

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填在题中的横线上.

13. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y-4\leq 0,\\2x+y-3\geq 0,\\y\leq 2,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最大值为 __14__. 　8+6

14. $(x+1)(2x-1)^6$ 的展开式中 x^5 的系数为 __49__.

15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 作斜率为 $\sqrt{5}$ 的直线 l 与 C 交于 M,N 两点，若线段 MN 中点的纵坐标为 $\sqrt{10}$，则 F 到 C 的准线的距离为 __$5\sqrt{2}$__.

16. 若不等式 $2a\cdot(\sqrt{e})^x\geq e^a\cdot x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的值为 __$\frac{1}{2}$__.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(本小题满分 12 分)

在①$\cos C=\frac{a}{b}-\frac{c}{2b}$,②$\frac{a}{2b}=\frac{\sin A}{\tan B}$,③$\frac{\sqrt{3}a}{b}-\sin C=\sqrt{3}\cos C$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并作答.

在$\triangle ABC$中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 2 .

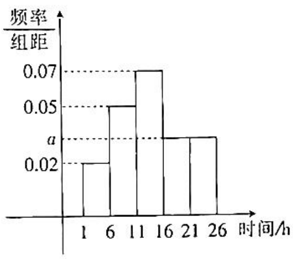
(1)求 B 的大小;

(2)若 $b=2$,求 a^2+c^2 的最大值.

注:如选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.(本小题满分 12 分)

网课是一种新兴的学习方式,它以互联网为平台,为学习者提供包含视频、图片、文字等多种形式的系列学习课程,由于具有方式多样,灵活便捷等优点,网课成为许多学生在假期实现自主学习的重要手段. 为了调查 A 地区高中生一周网课学习的时间,随机抽取了 500 名上网课的学生,将他们一周上网课的时间(单位:h)按$[1,6)$,$[6,11)$,$[11,16)$,$[16,21)$,$[21,26]$分组,得到频率分布直方图如下图所示.



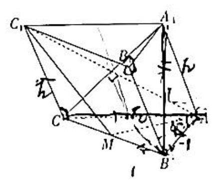
(1)求 a 的值,并估计这 500 名学生一周上网课时间的平均数(同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(2)以频率估计概率,若在 A 地区所有上网课的高中生中任选 4 人,记一周上网课时间在$[6,11)$的人数为 X,求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

X=0,1,2,3,4

19.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle A_1B_1C_1=\angle C_1CB=2\angle BAC=90°$,$CC_1=AC$,$A_1B=BC$.



(1)求证:$A_1B\perp AC$;

(2)若 M 为线段 BC 的中点,求直线 CC_1 与平面 MAC_1 所成角的正弦值.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},1\right)$，$(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

（1）求 C 的方程；

（2）若不过点 $A(0,2)$ 的直线 l 与 C 交于 M,N 两点，且满足 $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|=|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}|$，试探究：$l$ 是否过定点，若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由.

解

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2x^2+\cos 2x-1$.

（1）判断 $f(x)$ 的零点个数；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，证明：$xe^x+\frac{1}{2}\sin 2x\geqslant 2\sin x+\sin^2 x$.

$xe^x+\frac{1}{2}\sin 2x \geqslant 2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}$　　$2xe^x+(\sin 2x+\cos 2x)\geqslant 4\sin x+1$

$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\geqslant 4\sin x+1$

$xe^x+\frac{1}{2}\sin 2x \geqslant 2\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4－4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-5t\\y=1-5t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$.

（1）求 l 的极坐标方程以及 C 的直角坐标方程；　~~x+y=5~~　$x-y=1$

（2）设点 M,N 分别在 l 与 C 上，求 $|MN|$ 的最小值.

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=1-2\sin^2\theta$
$=2\cos^2\theta-1$

23.（本小题满分 10 分）【选修 4－5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|2x-4|+|x+3|$ 的最小值为 m.

（1）求 m 的值；

（2）求证：当 $y\in(0,1)$ 时，$\frac{1+y}{y}+\frac{1}{1-y}\geqslant m$.

智慧上进·2021—2022学年高三一轮复习验收考试

数学(理)参考答案

1.【答案】C

【解析】依题意,$A=\{x|x(3x-2)<0\}=\{x|0<x<\frac{2}{3}\}$,$B=\{x|3x-1>0\}=\{x|x>\frac{1}{3}\}$,故$A\cap B=\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\}$,故选C.

2.【答案】A

【解析】$\frac{m-2i}{1+3i}=\frac{(m-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{m-3mi-2i-6}{10}=\frac{m-6}{10}-\frac{3m+2}{10}i$,故$\begin{cases}\frac{m-6}{10}=0,\\-\frac{3m+2}{10}\neq0,\end{cases}$解得$m=6$,故选A.

3.【答案】B

【解析】因为$\mu=3$,故$P(x<0)=P(x>6)$,而$P(x<0)\cdot P(x>6)=0.04$,故$P(x<0)=0.2$,则$P(0<x<3)=0.5-0.2=0.3$,故选B.

4.【答案】D

【解析】易知视标边长从上到下是公比为$10^{-\frac{1}{10}}$的等比数列,记视力4.1的视标边长为$a_1=a$,则视力4.9的视标边长为$a_9=a_1q^8=a\cdot(10^{-\frac{1}{10}})^8=10^{-\frac{4}{5}}a$,故选D.

5.【答案】D

【解析】依题意,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2=12-4=8$,故选D.

6.【答案】B

【解析】依题意,$S_n=-3n+\frac{4n(n-1)}{2}=2n^2-5n$,则$\frac{S_n}{n}=2n-5$,所以$\{\frac{S_n}{n}\}$是以$-3$为首项,2为公差的等差数列,则$\{\frac{S_n}{n}\}$的前8项和$T_8=-3\times8+\frac{8\times7}{2}\times2=32$,故选B.

7.【答案】C

【解析】$\frac{1}{\log_7 10}+2\lg5+\lg8-\lg14=\lg7+\lg25+\lg8-\lg14=\lg\frac{25\times7\times8}{14}=\lg100=2$,故$\varphi\left[\left(\frac{1}{\log_7 10}+2\lg5+\lg8-\lg14\right)^5\right]=\varphi(32)=32-\frac{32}{2}=16$,故选C.

8.【答案】D

【解析】因为$|MF_2|-|MF_1|=4$,所以点M在C的上支,C的渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{\sqrt{m}}x$,而点M又在直线$y=x$上,故$1>\frac{2}{\sqrt{m}}$,解得$m>4$,故选D.

9.【答案】B

【解析】不妨设 $AD=2$，取 SD 的中点 Q，连接 QF、QE，则 $QF=\frac{1}{2}CD=EB$ 且 $QF/\!/EB$，故四边形 $EBFQ$ 为平行四边形，故 $BF/\!/EQ$，故 $\angle QEC$ 即为异面直线所成的角，在 $\triangle QEC$ 中，$EC=CQ=\sqrt{5}$，$QE=\sqrt{6}$，故 $\cos\angle QEC=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$，故选 B.

10.【答案】A

【解析】依题意，$f(x)$ 的图象关于点 $(-1,2)$ 中心对称，$g(x)=\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+2-5}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$，故 $g(x)$ 的图象也关于点 $(-1,2)$ 中心对称，故 $\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{16}x_i+\sum\limits_{i=1}^{16}y_i=-16+32=16$，故选 A.

11.【答案】C

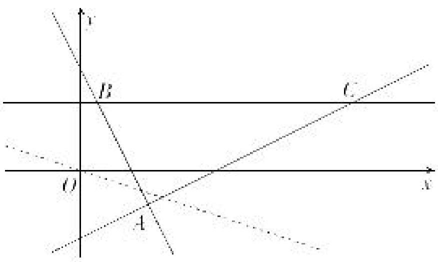
【解析】依题意，$f(\pi-x)=\cos(\pi-x)+\cos(\sin(\pi-x))=-\cos x+\cos(\sin x)\neq f(x)$，故 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故①错误；因为 $f(x+2\pi)=f(x)$，故 2π 为 $f(x)$ 的一个周期，故②正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$y=\sin x$ 单调递增，易知 $y=\cos x$，$y=\cos(\sin x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，故③正确，故选 C.

12.【答案】B

【解析】设球 O 的半径为 R，因为 SC 是球 O 的直径，故 $\triangle SCA$，$\triangle SCB$ 均为直角三角形，因为 $\angle SCA=\angle SCB=60°$，故 $SA=SB=\sqrt{3}R$，作 $AD\perp SC$ 于 D，连接 DB，可得 $DB=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，因为 $AB=3$，故 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot\sqrt{AD^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{R^2-3}$，故 $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{R^2-3}\cdot 2R=9$，解得 $R=2\sqrt{3}$，故球 O 的表面积为 $4\pi R^2=48\pi$，故选 B.

13.【答案】14

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如下图阴影部分所示，观察可知，当直线 $z=x+3y$ 过点 C 时，z 有最大值，联立 $\begin{cases}x-2y-4=0,\\ y=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\ y=2,\end{cases}$ 故 $z=x+3y$ 的最大值为 14.



14.【答案】48

【解析】所求 x^3 的系数为 $C_6^2\times2^4\times(-1)^2+C_6^1\times2^5\times(-1)^1=48$.

15.【答案】$5\sqrt{2}$

【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，故 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，两式相减可得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$，则 $(y_1+y_2)\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2p$，即 $2\sqrt{10}\times\sqrt{5}=2p$，解得 $p=5\sqrt{2}$.

16.【答案】1

【解析】依题意，$\dfrac{a}{e^a}\geqslant\dfrac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}$（*），令 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则（*）式化为 $g(a)\geqslant g\left(\dfrac{1}{2}x\right)$，而 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，故当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}=g\left(\dfrac{1}{2}x\right)_{\max}$，故 $\dfrac{a}{e^a}\geqslant\dfrac{1}{e}$，则 $a=1$.

17. 解：(1) 若选①：$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2a-c}{2b}$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$，

则 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，(4 分)

$\because B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. (5 分)

若选②：由 $\dfrac{a}{2b}=\dfrac{\sin A}{\tan B}$，得 $a\tan B=2b\sin A$，

即 $a\sin B=2b\sin A\cos B$，

由正弦定理可得 $\sin A\sin B=2\sin A\sin B\cos B$，(2 分)

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\sin B\neq0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$. (4 分)

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. (5 分)

若选③：由 $\dfrac{\sqrt{3}a}{b}-\sin C=\sqrt{3}\cos C$，得 $\sqrt{3}a=b\sin C+\sqrt{3}b\cos C$，

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A=\sin B\sin C+\sqrt{3}\sin B\cos C$，

即 $\sqrt{3}\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin B\sin C+\sqrt{3}\sin B\cos C$，

即 $\sqrt{3}\sin C\cos B=\sin B\sin C$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq0$，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，

又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. (5 分)

(2) 由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-ac\geqslant a^2+c^2-\dfrac{a^2+c^2}{2}=\dfrac{a^2+c^2}{2}$，(8 分)

$\therefore a^2+c^2\leqslant 2b^2=8$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号，

$\therefore a^2+c^2$ 的最大值为 8. (12 分)

18. 解:(1)依题意,$5\times(0.02+0.05+0.07+2a)=1$,(1 分)

解得 $a=0.03$;(3 分)

这 500 名学生上网课时间的平均数为 $3.5\times0.1+8.5\times0.25+13.5\times0.35+18.5\times0.15+23.5\times0.15=13.5$. (6 分)

(2)依题意,$X\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$,故 $P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$,

$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256}$,$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256}$,

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{12}{256}$,$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$,(9 分)

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

(10 分)

故 $E(X)=4\times\frac{1}{4}=1$. (12 分)

19. (1)证明:$\because\angle A_1B_1C_1=90^\circ$,$\therefore A_1B_1\perp B_1C_1$,$\therefore AB\perp BC$;

同理 $BC\perp CC_1$,而 $BB_1//CC_1$,$\therefore BC\perp BB_1$;(1 分)

$\because AB\cap BB_1=B$,$AB,BB_1\subset$平面 ABB_1,$\therefore BC\perp$平面 ABB_1,(2 分)

又 $A_1B\subset$平面 ABB_1,$\therefore A_1B\perp BC$,(3 分)

设 $CC_1=2\sqrt{2}$,则 $AB=A_1B=2$,$AA_1=2\sqrt{2}$,得 $AA_1^2=AB^2+A_1B^2$,(4 分)

$\therefore A_1B\perp AB$,又 $AB,BC\subset$平面 ABC,$AB\cap BC=B$,$\therefore A_1B\perp$平面 ABC;(5 分)

$\because AC\subset$平面 ABC,$\therefore A_1B\perp AC$. (6 分)

(2)解:以 B 为原点,BA、BC、BA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

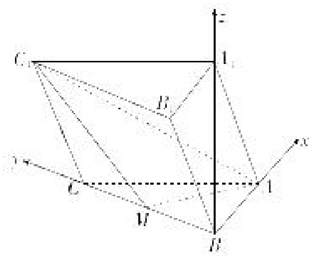
设 $CC_1=2\sqrt{2}$,则 $B(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$M(0,1,0)$,$C_1(-2,2,2)$,(7 分)

$\therefore\overrightarrow{MA}=(2,-1,0)$,$\overrightarrow{MC_1}=(-2,1,2)$,$\overrightarrow{CC_1}=(-2,0,2)$,(8 分)

设平面 MAC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{MA}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{MC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\-2x+y+2z=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}y=2x\\z=0\end{cases}$,$\therefore$ 取 $\boldsymbol{n}=(1,2,0)$,(10 分)

$\therefore$ 直线 CC_1 与平面 MAC_1 所成角的正弦值 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. (12 分)



20. 解：(1) 依题意，$\begin{cases}\dfrac{9}{2a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1,\end{cases}$ (2 分)

解得 $a^2=6$，$b^2=4$，所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$. (4 分)

(2) 由题意知 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=kx+m$，其中 $m\neq 2$.

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(3k^2+2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$，(6 分)

$\Delta=36k^2m^2-12(3k^2+2)(m^2-4)=24(6k^2+4-m^2)$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-12}{3k^2+2}$，(7 分)

因为 $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|=|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}|$，两边同时平方整理可得，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，(8 分)

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=x_1x_2+(y_1-2)(y_2-2)=x_1x_2+(kx_1+m-2)(kx_2+m-2)$

$=(k^2+1)x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2=0$，(9 分)

所以 $(k^2+1)\dfrac{3m^2-12}{3k^2+2}+k(m-2)\dfrac{-6km}{3k^2+2}+(m-2)^2=0$，

即 $(k^2+1)(3m^2-12)-6k^2m(m-2)+(m-2)^2(3k^2+2)=0$，

因为 $m\neq 2$，所以 $(k^2+1)(3m+6)-6k^2m+(m-2)(3k^2+2)=0$，

所以 $3k^2m+6k^2+3m+6-6k^2m+3k^2m+2m-6k^2-4=0$，

得 $5m+2=0$，解得 $m=-\dfrac{2}{5}$，(11 分)

满足 $\Delta>0$. 所以 l 的方程为 $y=kx-\dfrac{2}{5}$，即 l 过定点 $\left(0,-\dfrac{2}{5}\right)$. (12 分)

21. (1) 解：依题意，$f'(x)=-2\sin 2x+4x$，(1 分)

令 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=-4\cos 2x+4\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，(2 分)

又 $\varphi(0)=0$，所以当 $x<0$ 时，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

而 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 仅有 1 个零点. (5 分)

(2) 证明：要证 $xe^x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\geqslant 2\sin x+\sin^2x$，即证 $xe^x\geqslant \sin x(2-\cos x)+\sin^2x$.

①当 $x\geqslant\pi$ 时，$xe^x\geqslant\pi e^{\pi}>4$，而 $\sin x(2-\cos x)+\sin^2x\leqslant 1\times 3+1=4$，

所以不等式成立；(6 分)

②当 $0\leqslant x<\pi$ 时，$\sin x>0$，由 (1) 知 $x\geqslant 0$ 时，$\cos 2x\geqslant 1-2x^2$，

所以 $\cos x\geqslant 1-2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{2}x^2$，则 $2-\cos x\leqslant 1+\dfrac{1}{2}x^2$，

所以 $p(x)\leqslant p(0)=0$，即 $\sin x\leqslant x$.（9 分）

故只需证 $xe^x\geqslant x\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)+x^2$，即证 $e^x\geqslant 1+\frac{1}{2}x^2+x$.

令 $q(x)=e^x-1-\frac{1}{2}x^2-x(0\leqslant x<\pi)$，故 $q'(x)=e^x-x-1=r(x)$，$r'(x)=e^x-1\geqslant 0$，

故 $q'(x)\geqslant q'(0)=0$，故 $q(x)\geqslant q(0)=0$，即 $e^x\geqslant 1+\frac{1}{2}x^2+x$.

综上所述，$xe^x+\frac{1}{2}\sin 2x\geqslant 2\sin x+\sin^2 x$.（12 分）

22. 解：（1）依题意，$l:x-y=1$，所以 $\rho\cos\alpha-\rho\sin\alpha=1$，

即 $\sqrt{2}\rho\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=1$，

即 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$；（3 分）

因为 $\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$，所以 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$，即 $(\rho\cos\theta)^2=\rho\sin\theta$，

故 C 的直角坐标方程为 $y=x^2$.（5 分）

（2）易知 $|MN|$ 的最小值即为点 N 到 l 距离的最小值，

设 $N(x_0,y_0)$，则 $y_0=x_0^2$，所以 N 点到 l 的距离为

$$d=\frac{|x_0-y_0-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0-x_0^2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{2}}$$，（8 分）

所以当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，$d_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$，此时 N 点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，（9 分）

故 $|MN|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.（10 分）

23. （1）解：$f(x)=|2x-4|+|x+3|$

$=|x-2|+|x+3|+|x-2|\geqslant|x+3|+|x-2|\geqslant|(x+3)-(x-2)|=5$，

当且仅当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有最小值 5，即 $m=5$.（5 分）

（2）证明：因为 $y\in(0,1)$，所以 $\frac{1+y}{y}+\frac{1}{1-y}=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)[y+(1-y)]+1$

$=3+\frac{1-y}{y}+\frac{y}{1-y}\geqslant 3+2=5$，当且仅当 $\frac{1-y}{y}=\frac{y}{1-y}$，即 $y=\frac{1}{2}$ 时取等号，（8 分）

即当 $y\in(0,1)$ 时，$\frac{1+y}{y}+\frac{1}{1-y}\geqslant m$.（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。