绝密★启用前

2022—2023 学年高三一轮复习验收考试

数学理科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

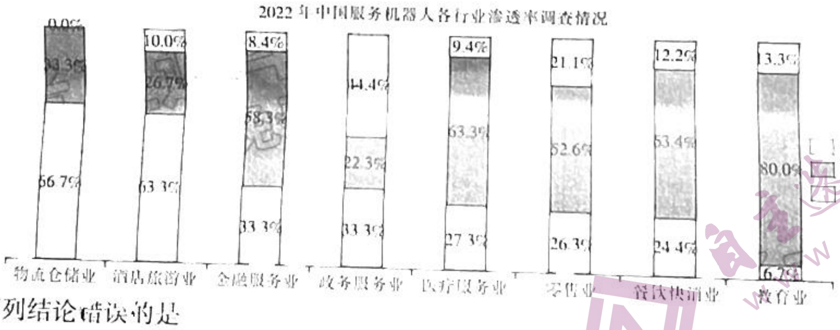
1. 已知集合 $A=\{x|x^2<2\}$，$B=\{y|y=2^x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $(\quad)$　　C. $[1,\sqrt{2})$　　D. $(-\sqrt{2},1]$

2. 已知 i 为虚数单位，若 $\frac{4-2i}{1+i}=a+bi^3(a,b\in\mathbf{R})$，则 $a+b=$

A. 4　　B. -2　　C. 0　　D. 6

3. 随着工业自动化和计算机技术的发展，中国机器人进入大量生产和实际应用阶段，下图为 2022 年中国服务机器人各行业渗透率调查情况.



根据该图，下列结论错误的是

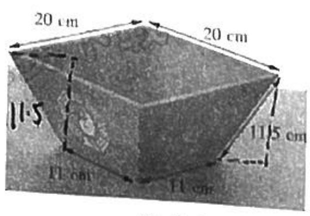
A. 物流仓储业是目前服务行业中服务机器人已应用占比最高的行业

B. 教育业目前在大力筹备应用服务机器人

C. 未计划使用服务机器人占比最高的是政务服务业

D. 图中八大服务业中服务机器人已应用占比的中位数是 33.3%

4. 中国某些地方举行婚礼时要在吉利方位放一张桌子，桌子上放一个装满粮食的升斗，斗面用红纸糊住，斗内再插一杆秤、一把尺子，寓意为粮食满园、称心如意、十全十美. 下图为一种婚庆升斗的规格，把该升斗看作一个正四棱台，忽略其壁厚，则该升斗的容积约为（参考数据：$\sqrt{91.75}\approx 9.6$，$1\ \mathrm{L}=1\ 000\ \mathrm{cm}^3$，参考公式：$V_{棱台}=\frac{1}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上 S_下})\cdot h$）



A. 1.5 L　　B. 2.4 L　　C. 5.0 L　　D. 7.1 L

5. 若双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $x+2y=0$，则下列选项中不可能为双曲线 C 的方程的是

A. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$　　C. $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$　　D. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=1$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且满足 $a_1=3a_3=a_5+4$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的最大值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

7. 多项式 $\left(2-\frac{1}{x}\right)(\sqrt{x}+1)^7$ 的展开式中的常数项为

A. -21　　B. -19　　C. -5　　D. -7

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $k=$

A. 1　　B. ± 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\pm\sqrt{2}$

9. 已知 $a=\frac{5}{2}$，$b=4\log_3 2$，$c=15^{\frac{1}{3}}$，则

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

10. 已知圆柱 O_1O_2 的轴截面是边长为 4 的正方形，底面圆 O_2 的圆周在球 O 的表面上，底面圆 O_1 所在平面被球 O 截得的是半径为 $2\sqrt{3}$ 的圆面，若点 O 在圆柱 O_1O_2 内，则球 O 的表面积与圆柱 O_1O_2 的表面积之比为

A. 2　　B. $\frac{13}{5}$　　C. $\frac{13}{6}$　　D. $\frac{13}{24}$

11. 已知曲线 $f(x)=|e^x-1|(x>-1)$ 在点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))(x_1<x_2)$ 处的切线 l_1,l_2 互相垂直，且切线 l_1,l_2 与 y 轴分别交于点 D,E，记点 E 的纵坐标与点 D 的纵坐标之差为 t，则

A. $\frac{2}{e}-2<t<0$　　B. $2-2e<t<0$

C. $t<\frac{2}{e}-2$　　D. $t>2e-2$

12. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $[M,N]$，则 $N-M$ 的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2},1\right]$

C. $[1,\sqrt{3}]$　　D. $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $3x-y$ 的取值范围是________.

14. 2022 年 12 月某机构关于中国新国货品牌“金榜题名”颁奖典礼准备以线上直播的形式举办，并邀请榜单中的 A,B,C,D,E 五家企业发言，则 A 在 C 之前发言（不一定相邻，下同），且 B 在 C 之后发言的方法种数为________.（用数字作答）

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=[2\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}}]^n$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 $4n$ 项的和为________.

16. 圆锥曲线 C 的弦 AB 与过弦的端点 A,B 的两条切线的交点 P 所围成的三角形 PAB 叫做阿基米德三角形. 若曲线 C 的方程为 $x^2=4y$，弦 AB 过 C 的焦点 F，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则有 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{x_1x_2}{4}$. 对于曲线 C 的阿基米德三角形 PAB 给出下列结论：①点 P 在直线 $y=-1$ 上；②$k_{PA}\cdot k_{PB}=1$；③$k_{PA}+k_{PB}=0$；④$|PF|^2=|FA||FB|$，其中所有正确结论的序号为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分) 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$c=a\left(\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$.

(1) 求 $\sin A$；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，且______（在下面两个条件中任选一个），求 $\triangle ABC$ 的周长.

①$a=2$；②$a=2c$.

注：如选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分) 数据显示中国车载音乐已步入快速发展期，随着车载音乐的商业化模式进一步完善，市场将持续扩大，下表为 2018—2022 年中国车载音乐市场规模（单位：十亿元），其中年份 2018—2022 对应的代码分别为 1～5.

年份代码 x	1	2	3	4	5
车载音乐市场规模 y	2.8	3.9	7.3	12.0	17.0

(1) 由上表数据知，可用指数函数模型 $y=a\cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的回归方程（a,b 的值精确到 0.1）；

(2) 综合考虑 2023 年及 2024 年的经济环境及疫情等因素，某预测公司根据上述数据求得 y 关于 x 的回归方程后，通过修正，把 $b-1.3$ 作为 2023 年与 2024 年这两年的年平均增长率，请根据 2022 年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测 2024 年中国车载音乐市场规模.

参考数据：

v	$\sum_{i=1}^{5}x_iv_i$	$e^{0.524}$	$e^{0.472}$
1.94	33.82	1.7	1.6

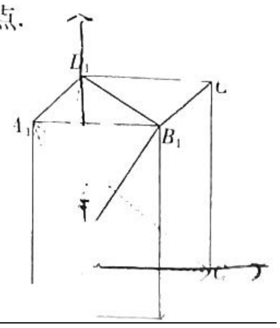
其中 $v_i=\ln y_i$，$v=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}v_i$.

参考公式：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{\beta}=$ [illegible] nuv [illegible] nu [illegible]，$\alpha=v-\beta u$.

19. (12 分) 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，点 E 为 DD_1 的中点.

(1) 证明：$AE\perp A_1C$；

(2) 求平面 A_1CD 与平面 AB_1D_1 夹角的余弦值.



20.（12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A_1\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$，$A_2\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$，$A_3\left(\frac{3}{2},0\right)$，$A_4(0,1)$ 中的 3 个点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）直线 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，直线 $y=k(x-2)-1$ 与 C 交于 M、N（点 M 在点 N 下方）两点，过点 M 与 x 轴垂直的直线与直线 AB 交于点 P，与直线 AN 交于点 Q，证明：点 P 为线段 MQ 的中点.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=e^{x}+(2-2a)e^{\frac{x}{2}}-a(x+1)(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=xe^{x}-\ln(ex)+mx$，若 $a=1$，且对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_2f(x_1)+g(x_2)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）【选修 4－4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=t^2+1\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=1$.

（1）求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程；

（2）若把直线 l 向上平移 $a(a>0)$ 个单位长度后与曲线 C 有公共点，求实数 a 的取值范围.

23.（10 分）【选修 4－5：不等式选讲】

已知 $f(x)=x^2-|x-3|$.

（1）求不等式 $f(x)<|x|$ 的解集；

（2）若 $a,b\in(1,+\infty)$，且对任意实数 x，恒有 $f(x)\geq a+b-ab$，证明：$a+b\geq2+\sqrt{17}$.

2022—2023 学年高三一轮复习验收考试

数学理科参考答案

1.【答案】C

【解析】$A=\{x|x^2<2\}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$B=\{y|y=2^{|x|}\}=[1,+\infty)$，所以 $A\cap B=[1,\sqrt{2})$，故选 C.

2.【答案】A

【解析】因为$\frac{4-2i}{1+i}=\frac{2(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-3i$，$a+bi^3=a-bi$，所以 $a=1$，$b=3$，$a+b=4$，故选 A.

3.【答案】D

【解析】由图可得 ABC 均正确，图中八大服务业中服务机器人已应用占比的中位数是$\frac{33.3\%+27.3\%}{2}=30.3\%$，D 错误，故选 D.

4.【答案】B

【解析】由题意可知，正四棱台的上底面面积 $S_1=400\ cm^2$、下底面面积 $S_2=121\ cm^2$，高 $h=\sqrt{11.5^2-\left(\frac{20\sqrt{2}-11\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{91.75}\approx 9.6\ cm$，所以该升斗的容积 $V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h=\frac{400+121+20\times 11}{3}\times 9.6=2\ 371.2\ cm^3$，即该升斗的容积约为 2.4 L，故选 B.

5.【答案】C

【解析】由题易知双曲线$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，其他三个选项中的双曲线的渐近线方程均为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 C.

6.【答案】C

【解析】设$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_1=3a_3=a_5+4$，得$\begin{cases}a_1=3(a_1+2d),\\a_1=a_1+4d+4,\end{cases}$解得 $a_1=3$，$d=-1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\cdot(-1)=4-n$，当 $n\leqslant 3$ 时，$a_n>0$，$a_4=0$，当 $n\geqslant 5$ 时，$a_n<0$，所以当 $n=3$ 或 4 时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和有最大值，最大值为 $3+2+1=6$，故选 C.

7.【答案】B

【解析】因为$(\sqrt{x}+1)^7$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_7^r(\sqrt{x})^{7-r}\cdot 1^r=C_7^r x^{\frac{7-r}{2}}(r=0,1,2,\cdots,7)$，所以$\left(2-\frac{1}{x}\right)(\sqrt{x}+1)^7$ 的展开式中的常数项为 $2C_7^7-\frac{1}{x}C_7^5(\sqrt{x})^2=2-21=-19$，故选 B.

8.【答案】B

【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 两边平方得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=r(r>0)$，则 $|\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+k^2\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+k^2}r$，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}|}=\frac{r^2}{r^2\cdot\sqrt{1+k^2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $k^2=1$，$k=\pm 1$，故选 B.

9.【答案】D

【解析】因为 $b=4\log_3 2=\frac{1}{2}\log_3 256>\frac{1}{2}\log_3 243=\frac{5}{2}$，$c=15^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{120}{8}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{2}$，所以 $c<a<b$，故选 D.

10.【答案】C

【解析】设球 O 的半径为 R，则 $\sqrt{R^2-2^2}+\sqrt{R^2-(2\sqrt{3})^2}=4$，解得 $R=\sqrt{13}$，则球 O 的表面积与圆柱 O_1O_2 的表

面积之比为$\frac{4\pi\times(\sqrt{13})^2}{2\pi\times2\times4+2\pi\times2^2}=\frac{13}{6}$,故选C.

11.【答案】A

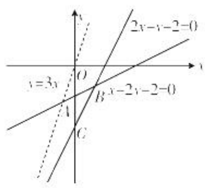
【解析】由题知$x_1<x_2$,当$-1<x<0$时,$f(x)=1-e^x$,$f'(x)=-e^x$,当$x>0$时,$f(x)=e^x-1$,$f'(x)=e^x$,因为切线l_1,l_2互相垂直,所以$f'(x_1)f'(x_2)=-1$,所以$-1<x_1<0<x_2$,$-e^{x_1}e^{x_2}=-e^{x_1+x_2}=-1$,所以$x_1+x_2=0$,$0<x_2<1$,直线$l_1$的方程为$y-(1-e^{x_1})=-e^{x_1}(x-x_1)$,令$x=0$,得$y=(x_1-1)e^{x_1}+1$,故$D(0,(x_1-1)e^{x_1}+1)$,直线$l_2$的方程为$y-(e^{x_2}-1)=e^{x_2}(x-x_2)$,令$x=0$,得$y=(1-x_2)e^{x_2}-1$,故$E(0,(1-x_2)e^{x_2}-1)$,所以$t=(1-x_2)e^{x_2}-(x_1-1)e^{x_1}-2=(1-x_2)e^{x_2}+(x_2+1)e^{-x_2}-2$,设$g(x)=(1-x)e^x+(x+1)e^{-x}-2(0<x<1)$,则$g'(x)=-x(e^x+e^{-x})<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,所以$g(1)<t<g(0)$,即$\frac{2}{e}-2<t<0$,故选A.

12.【答案】B

【解析】当$f(x)$在$\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{6}\right]$上单调时,$N-M=\left|f\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-f(\alpha)\right|=|\sin2\alpha|\leqslant1$;当$f(x)$在$x=\frac{\alpha+\alpha+\frac{\pi}{6}}{2}=\alpha+\frac{\pi}{12}$取得最值时,$N-M$最小,此时$2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则$N-M=\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\right|=\left|\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos k\pi\right|=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$,所以$N-M$的取值范围是$\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2},1\right]$,故选B.

13.【答案】$\left[1,\frac{8}{3}\right]$(写成$1\leqslant3x-y\leqslant\frac{8}{3}$也给分)

【解析】如图所示,不等式组$\begin{cases}2x-y-2\leqslant0,\\x-2y-2\geqslant0,\\x\geqslant0,\end{cases}$表示的可行域是以$A(0,-1)$,$B\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,$C(0,-2)$为顶点的三角形区域,设$3x-y=z$,则$y=3x-z$,作初始直线$y=3x$,该直线平移至经过点$A$时,$z$取得最小值1,平移至经过点$B$时,$z$取得最大值$\frac{8}{3}$,所以$3x-y$的取值范围是$\left[1,\frac{8}{3}\right]$.



14.【答案】20(用组合式表示不给分)

【解析】所求的发言的方法种数为$C_5^2A_2^2=20$.

15.【答案】$\frac{6}{5}(16^n-1)$(写成$\frac{6(16^n-1)}{5}$或$\frac{6\times16^n}{5}-\frac{6}{5}$也给分)

【解析】由$a_n=[2\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}}]^n=2^n\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$可得,当$n=4k-3$,$n=4k-2$时,$a_n=-2^n$,当$n=4k-1$,$n=4k$时,$a_n=2^n$,所以数列$\{a_n\}$的前$4n$项的和为$-(2+2^5+\cdots+2^{4n-3})-(2^2+2^6+\cdots+2^{4n-2})+(2^3+2^7+\cdots+2^{4n-1})+(2^4+2^8+\cdots+2^{4n})=-\frac{2(1-16^n)}{1-16}-\frac{4(1-16^n)}{1-16}+\frac{8(1-16^n)}{1-16}+\frac{16(1-16^n)}{1-16}=\frac{18}{15}(16^n-1)=\frac{6}{5}(16^n-1)$.

16.【答案】①④(结果少填、多填、错填都不给分)

【解析】设直线AB的方程为$y=kx+1$,与$x^2=4y$联立得$x^2-4kx-4=0$,所以$x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4$,所以$y_0=$

$\frac{x_1x_2}{4}=-1$，①正确；因为 $y=\frac{x^2}{4}$，所以 $y'=\frac{x}{2}$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，②错误；$k_{PA}+k_{PB}=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，③错误；由②知 $PA\perp PB$，由 $P(2k,-1)$，$F(0,1)$ 可得 $k_{PF}=\frac{2}{-2k}=-\frac{1}{k}$，所以 $PF\perp AB$，所以 $|PF|^2=|FA|\,|FB|$，④正确，故正确结论的序号为①④.

17. 解：(1) 由 $c=a\left(\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$ 及正弦定理得 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\left(\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$，

整理得 $\cos A\sin B=\frac{1}{2}\sin A\sin B$，(2 分)

因为 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$\sin B\neq0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}\sin A$，$1-\sin^2A=\frac{1}{4}\sin^2A$，$\sin^2A=\frac{4}{5}$，(5 分)

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$\sin A>0$，

所以 $\sin A=\frac{2\sqrt5}{5}$.(6 分)

(2) 若选①：由 $\triangle ABC$ 的面积为 1，得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2\sqrt5}{5}=1$，所以 $bc=\sqrt5$，(8 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A=\frac{2\sqrt5}{5}$，得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{\sqrt5}{5}$，

由余弦定理得 $a^2=4=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$

$=(b+c)^2-2\sqrt5-2\sqrt5\times\frac{\sqrt5}{5}=(b+c)^2-2\sqrt5-2$，(10 分)

所以 $(b+c)^2=6+2\sqrt5$，$b+c=1+\sqrt5$，(11 分)

所以 $a+b+c=3+\sqrt5$，

即 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt5$.(12 分)

若选②：由 $\triangle ABC$ 的面积为 1，得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2\sqrt5}{5}=1$，所以 $bc=\sqrt5$，(8 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A=\frac{2\sqrt5}{5}$，得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{\sqrt5}{5}$，

由余弦定理得 $a^2=4c^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2$，

即 $b^2=3c^2+2$，(10 分)

由 $\begin{cases}bc=\sqrt5,\\ b^2=3c^2+2,\end{cases}$ 解得 $b=\sqrt5$，$c=1$，(11 分)

所以 $a=2c=2$，$a+b+c=3+\sqrt5$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt5$.(12 分)

【评分细则】

第(1)小题不写"因为 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$\sin B\neq0$"扣 1 分，不写"因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$\sin A>0$"扣 1 分.

18. 解：(1) $y=a\cdot b^x$ 两边同时取自然对数得 $\ln y=\ln(a\cdot b^x)=\ln a+x\ln b$.

设 $\ln y=v$，所以 $v=\ln a+x\ln b$，(2 分)

因为 $x=3$，$v=1.94$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=55$，

所以 $\ln\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5\bar{x}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{33.82-5\times3\times1.94}{55-5\times3^2}=0.472$.(4 分)

把(3,1.94)代入 $v=\ln\hat{a}+\bar{x}\ln\hat{b}$,得 $\ln\hat{a}=0.524$,(6 分)

所以 $\hat{v}=0.524+0.472x$,即 $\ln\hat{y}=0.524+0.472x$,(7 分)

所以 $\hat{y}=e^{0.524+0.472x}=1.7\times1.6^x$,

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=1.7\times1.6^x$.(9 分)

(2)由(1)知 $b-1.3=0.3$,(10 分)

所以根据 2022 年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测 2024 年中国车载音乐市场规模为 17.0×1.3^2 $=17.0\times1.69=28.73$ 十亿元.(12 分)

【评分细则】

所得数据非常接近可酌情给分.

19.(1)证明:因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AD=1$,$AA_1=\sqrt{2}$,

所以 $\tan\angle DA_1A=\dfrac{AD}{AA_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为点 E 为 DD_1 的中点,

所以 $\tan\angle EAD=\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\angle DA_1A=\angle EAD$,(2 分)

因为 $\angle DA_1A+\angle A_1DA=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\angle EAD+\angle A_1DA=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $AE\perp A_1D$,(3 分)

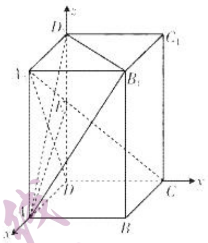
又在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1,

$AE\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $CD\perp AE$,(4 分)

因为 $A_1D\cap CD=D$,所以 $AE\perp$ 平面 A_1CD,(5 分)

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1CD,所以 $AE\perp A_1C$.(6 分)

(2)解:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,\sqrt{2})$,$A_1(1,0,\sqrt{2})$,$B_1(1,1,\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{2})$,(8 分)

设平面 A_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_1=0,\\ x_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},0,1)$,(9 分)

设平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ -x_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$.（10 分）

设平面 A_1CD 与平面 AB_1D_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}+0\times(-\sqrt{2})+1\times1|}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2+0^2+1^2}\times\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.（11 分）

所以平面 A_1CD 与平面 AB_1D_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.（12 分）

【评分细则】

(1) 第(1)小题不写"因为 $A_1D\cap CD=D$，所以 $AE\perp$ 平面 A_1CD"，扣 1 分，用向量或其他方法证明酌情给分.

(2) 第(2)小题不用空间向量求解，酌情给分，结果步骤均正确，可给满分，若使用空间向量，但没有在图中建立空间坐标系，扣 1 分.

20. (1) 解：因为点 A_1,A_2 关于原点对称，由椭圆的对称性可知 A_1,A_2 要么都在 C 上，要么都不在 C 上，

因为椭圆 C 经过 A_1,A_2,A_3,A_4 中的 3 个点，

所以 A_1,A_2 都在 C 上，$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$，（2 分）

因为 $A_1\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在 C 上，$\sqrt{3}>\dfrac{3}{2}$，所以 $A_3\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 不在 C 上，故 $A_4(0,1)$ 在 C 上，

所以 $b=1$，代入 $\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$，得 $a=2$，

所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.（4 分）

(2) 证明：由题意知 $A(2,0)$，$B(0,-1)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$y_2>y_1$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-2)-1\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$，

由 $\Delta=-64k>0$ 得 $k<0$，

$x_1+x_2=\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}$，（6 分）

直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{2}-y=1$，

直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

所以 $P\left(x_1,\dfrac{x_1-2}{2}\right)$，$Q\left(x_1,\dfrac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)\right)$，（8 分）

所以 $y_M+y_Q-2y_P$

$=y_1+\dfrac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)-(x_1-2)$

$=k(x_1-2)-1+\dfrac{k(x_2-2)-1}{x_2-2}(x_1-2)-(x_1-2)$

$=\dfrac{(2k-1)(x_1-2)(x_2-2)-(x_1+x_2-4)}{x_2-2}$

$=\dfrac{(2k-1)[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]-(x_1+x_2-4)}{x_2-2}$

$$=\frac{(2k-1)\left(\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}-\frac{32k^2+16k}{1+4k^2}+4\right)-\left(\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}-4\right)}{x_2-2}=0.\text{(10 分)}$$

所以 $y_M+y_Q=2y_P$，

因为 M,P,Q 共线，所以点 P 是线段 MQ 的中点.（12 分）

【评分细则】

（1）第（1）小题直接写出 $A_1\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在 C 上，$A_2(0,1)$ 在 C 上，没有推理过程，扣 1 分.

（2）第（2）小题使用其他方法证明酌情给分，结果步骤均正确，可给满分.

21. 解：（1）因为 $f(x)=e^x+(2-2a)e^{\frac{x}{2}}-a(x+1)$，

所以 $f'(x)=e^x+(1-a)e^{\frac{x}{2}}-a=(e^{\frac{x}{2}}-a)(e^{\frac{x}{2}}+1)$.（1 分）

因为 $e^{\frac{x}{2}}+1>0$，

若 $a\leqslant 0$，$e^{\frac{x}{2}}-a>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.（2 分）

若 $a>0$，当 $x\in(-\infty,2\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,2\ln a)$ 上单调递减，在 $(2\ln a,+\infty)$ 上单调递增.（4 分）

综上可得，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,2\ln a)$ 上单调递减，在 $(2\ln a,+\infty)$ 上单调递增.（5 分）

（2）对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_2f(x_1)+g(x_2)>0$，

即 $f(x_1)+\frac{g(x_2)}{x_2}>0$，设 $h(x)=\frac{g(x)}{x}$，则 $f(x_1)+h(x_2)>0$，

即 $f(x)_{\min}+h(x)_{\min}>0$.（6 分）

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，

由（1）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$.（7 分）

因为 $h(x)=e^x-\frac{\ln(ex)}{x}+m=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+m$，

所以 $h'(x)=e^x-\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

设 $s(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln 2<\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{2}(1-\ln 4)<0$，$s(1)=e>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $s(x_0)=0$.（8 分）

即 $x_0^2e^{x_0}=-\ln x_0$，即 $x_0e^{x_0}=-\frac{1}{x_0}\ln x_0=e^{\ln\frac{1}{x_0}}\ln\frac{1}{x_0}$，

由 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，得 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}=-\ln x_0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$.（9 分）

$x\in(0,x_0)$ 时，$s(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$s(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}+m=\frac{1}{x_0}-\frac{-x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}+m=1+m$.（11 分）

所以由 $f(x)_{\min}+h(x)_{\min}>0$ 得 $1+m>0$，即 $m>-1$，

所以实数 m 的取值范围是 $(-1,+\infty)$.（12 分）

【评分细则】

(1)第(1)小题单调区间是否包括端点都给分,若单调区间没有写成区间形式,酌情扣分.

(2)第(2)小题使用其他方法证明酌情给分,结果步骤均正确,可给满分.

22. 解:(1)由 $x=2t-1$ 得 $t=\frac{x+1}{2}$,

所以 $y=t^2+1=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$,

所以 C 的普通方程为 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.(3 分)

由 $\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$ 得 l 的直角坐标方程为 $x-2y-1=0$.(5 分)

(2)把直线 l 向上平移 $a(a>0)$ 个单位长度后所得直线的方程为 $x-2(y-a)-1=0$,

即 $x-2y+2a-1=0$,

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4},\\ x-2y+2a-1=0,\end{cases}$ 得 $x^2=4a-7$.(7 分)

所以 $a\geqslant\frac{7}{4}$,即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$.(10 分)

【评分细则】

(1)第(1)小题 l 的方程写成 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$,不扣分.

(2)第(2)小题 a 的取值范围不写成集合或区间形式不扣分.

23. (1)解:原不等式等价于 $\begin{cases}x>3,\\ x^2-2x+3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\ x^2-3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ x^2+2x-3<0,\end{cases}$(2 分)

解得 $x\in\varnothing$ 或 $0\leqslant x<\sqrt{3}$ 或 $-3<x<0$.(4 分)

所以原不等式的解集为 $(-3,\sqrt{3})$.(5 分)

(2)证明:当 $x\geqslant 3$ 时,$f(x)=x^2-x+3\geqslant 3^2-3+3=9$,

当 $x<3$ 时,$f(x)=x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\geqslant-\frac{13}{4}$,当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时取等号,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{13}{4}$.(7 分)

所以 $a+b-ab\leqslant-\frac{13}{4}$,$ab-a-b\geqslant\frac{13}{4}$,

即 $(a-1)(b-1)\geqslant\frac{17}{4}$,结合 $a,b\in(1,+\infty)$,可得 $a-1>0,b-1>0$,

所以 $a+b=(a-1)+(b-1)+2\geqslant 2+2\sqrt{(a-1)(b-1)}\geqslant 2+\sqrt{17}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号.(10 分)

【评分细则】

(1)第(1)小题中的不等式解集不写成集合或区间形式扣 1 分.

(2)第(2)小题使用其他方法证明酌情给分,结果步骤均正确,可给满分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。