高三数学考试参考答案

1. C 【解析】本题考查复数的四则运算，考查数学运算的核心素养.
因为 $z=i(1+i)=-1+i$，所以 $z^2=-2i$.

2. B 【解析】本题考查一元二次不等式的解法与集合的交集、并集、子集，考查数学运算的核心素养.
因为 $M=\{x|-2<x<5\}$，$N=\{x|1<x<6\}$，所以 $M\cup N=\{x|-2<x<6\}$.

3. D 【解析】本题考查统计图表的应用，考查数据分析的核心素养.
2018 年 6 月我国网民规模比 2017 年 6 月我国网民规模增加的比例为 $\frac{80166-75116}{75116}=\frac{5050}{75116}<\frac{5050}{75000}=\frac{101}{1500}\approx 0.067<7\%$.

4. A 【解析】本题考查直线与圆，考查直观想象的核心素养.
由 $x^2+y^2-4x=0$，得 $(x-2)^2+y^2=4$，圆心为 $(2,0)$，半径 $r=2$，圆心到直线 $3x-4y+9=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times2-4\times0+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，故圆 $x^2+y^2-4x=0$ 上的点到直线 $3x-4y+9=0$ 的距离的最小值为 $d-r=1$.

5. C 【解析】本题是一个考查平面向量数量积的易错题，易错点为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角.
因为 $|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{AB}^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BC}^2=2^2+4\times2\times1\times(-\frac{1}{2})+4=4$，
所以 $|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}|=2$.

6. A 【解析】本题考查导数的应用，考查数学运算的核心素养.
因为 $y'=-3x(x-4)$，所以当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y'\geqslant 0$；当 $x>4$ 时，$y'<0$.
因此，$y=-x^3+6x^2(x\geqslant 0)$ 的最大值为 $-4^3+6\times4^2=32$.

7. B 【解析】本题考查数学文化与简单几何体的综合，考查空间想象能力.
不妨设弧 AD 所在圆的半径为 R，弧 BC 所在圆的半径为 r，由弧 AD 长度为弧 BC 长度的 3 倍可知 $R=3r$，$CD=R-r=2r=2$，即 $r=1$. 故该曲池的体积 $V=\frac{\pi}{4}\times(R^2-r^2)\times3=6\pi$.

8. D 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质，考查推理论证能力与数形结合的数学思想.
因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，所以 $\omega=\frac{1}{2}$. 由 $f(x)=0$，得 $\sin(\frac{1}{2}x+\varphi)=\frac{1}{2}$.
当 $x\in[0,5\pi]$ 时，$\frac{1}{2}x+\varphi\in[\varphi,\varphi+\frac{5\pi}{2}]$，又 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{5\pi}{2}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2}\leqslant 3\pi$.
因为 $y=\sin x-\frac{1}{2}$ 在 $[0,3\pi]$ 上的零点为 $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$，且 $f(x)$ 在 $[0,5\pi]$ 内恰有 3 个零点，所以
$\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6},\\ \frac{13\pi}{6}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2}<\frac{17\pi}{6}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{17\pi}{6}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

9. ACD 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.
因为 $\tan\alpha=4$，$\tan\beta=-\frac{1}{4}$，所以 $\tan(-\alpha)\tan\beta=-\tan\alpha\tan\beta=1$，$\alpha$ 未必是锐角(比如 α 可以是第三象限角)，$\tan(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\frac{3}{5}$，$\tan 2\alpha=\tan 2\beta=-\frac{8}{15}$.

10. BCD 【解析】本题考查抛物线的定义与性质以及基本不等式的应用，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
C 的焦点坐标为 $(1,0)$，C 的准线方程为 $x+1=0$，根据抛物线的定义可得 P 到焦点的距离等于 P 到准线的距离，即 $x_0+1=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$.
因为 $y_0^2=4x_0$，所以 $x_0+\frac{1}{y_0^2+1}=\frac{y_0^2}{4}+\frac{1}{y_0^2+1}=\frac{y_0^2+1}{4}+\frac{1}{y_0^2+1}-\frac{1}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

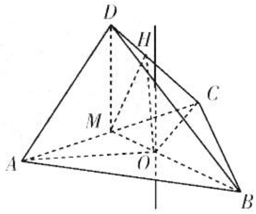
当且仅当$\frac{y_0^2+1}{4}=\frac{1}{y_0^2+1}$，即 $y_0^2=1$ 时，等号成立，故 $x_0+\frac{1}{y_0^2+1}$ 的最小值为$\frac{3}{4}$.

11. BC 【解析】本题考查函数性质的综合，考查推理论证能力与抽象概括能力.

$x_1x_2f(x_1)-x_1>x_1x_2f(x_2)-x_2$，两边同时除以 x_1x_2 得 $f(x_1)-\frac{1}{x_2}>f(x_2)-\frac{1}{x_1}$，即 $f(x_1)+\frac{1}{x_1}>f(x_2)+\frac{1}{x_2}$，得 $g(x_1)>g(x_2)$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，A 错误.

因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的奇函数，且 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $g(1)=g(-1)=0$，B 正确. 由 $g(3)<g(2)$ 得 $f(3)+\frac{1}{3}<f(2)+\frac{1}{2}$，即 $f(3)-f(2)<\frac{1}{6}=\log_{64}2$，即 $f(3)+f(-2)<\log_{64}2$，C 正确. 不等式 $g(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，D 错误.

12. AD 【解析】本题考查四面体的外接球与二面角，考查空间想象能力与推理论证能力.



设△ABC 的中心为 G，过点 G 作直线 $l\perp$ 平面 ABC，则球心 O 在 l 上. 由 M 为 AC 的中点，得 $BM\perp AC$. 因为 $AC\perp BD$，所以 $AC\perp$ 平面 BDM，则 $AC\perp DM$，所以 $AD=DC=\sqrt{2}$，所以 $AD^2+DC^2=AC^2$，所以$\angle ADC=90°$，$DM=\frac{1}{2}AC=1$，所以 $DM^2+BM^2=BD^2$，所以 $BM\perp DM$，可得 $BM\perp$ 平面 ACD，所以球心 O 在直线 MB 上，因此 O 与 G 重合. 过 M 作 $MH\perp CD$ 于 H，连接 OH，则 $OH\perp CD$，从而$\angle OHM$ 为二面角 $A-CD-O$ 的平面角. 因为 $OM=\frac{BM}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$HM=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 O 到 AC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $\tan\angle OHM=\frac{OM}{HM}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

13. $(0,4]$ 【解析】本题考查函数的定义域与基本初等函数，考查数学运算的核心素养.

由 $16-2^x\geqslant0$，得 $x\leqslant4$，因为 $x>0$，所以 $0<x\leqslant4$.

14. 161 【解析】本题考查排列组合的应用，考查分类讨论的数学思想.

若派 2 位男员工去学习，则有 $C_7^2C_6^3=126$ 种选法；若派 3 位男员工去学习，则有 $C_7^3=35$ 种选法. 故至少选派 2 位男员工的选法种数为 $126+35=161$.

15. 4560 【解析】本题考查等比数列的应用，考查抽象概括能力.

依题意可得，第 8 匹马、第 7 匹马、……、第 1 匹马的最长日行路程里数依次成等比数列，且首项为 400，公比为 1.1，故这 8 匹马的最长日行路程之和为$\frac{400(1-1.1^8)}{1-1.1}=4000\times(2.14-1)=4560$ 里.

16. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$（答案不唯一，只要形如$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$，且 $a^2\geqslant\frac{49}{6}$ 即可） 【解析】本题考查椭圆的方程与性质，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为$|PF_1|=6|PF_2|$，所以$|PF_1|+|PF_2|=7|PF_2|=2a$，则$|PF_2|=\frac{2a}{7}$.

又因为 $a-c\leqslant|PF_2|\leqslant a+c$，所以$\frac{2a}{7}\geqslant a-c$，即$\frac{c}{a}\geqslant\frac{5}{7}$.

根据题意可设 C 的方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$.

则 $2b=4$，$b=2$. 由$\frac{c}{a}\geqslant\frac{5}{7}$，得$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\geqslant\frac{5}{7}$，解得 $a^2\geqslant\frac{49}{6}$.

17. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，因为 $a_2=4$，$a_8=2a_3$，所以$\begin{cases}a_1+d=4,\\a_1+7d=2(a_1+2d),\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=1.\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n+2$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{(n+a_1)^2}=\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}$， …………………………………………………… 7分

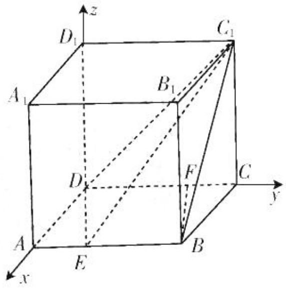
故 $S_n=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}=\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+3)^2}=\frac{n^2+6n}{9(n+3)^2}$. …………………… 10分

评分细则：

【1】第(1)问未设$\{a_n\}$的公差为d，直接得出方程组，不扣分.

【2】第(2)问中，“$S_n=\frac{n^2+6n}{9(n+3)^2}$”写为“$S_n=\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+3)^2}$”，不扣分.

18.(1)证明：在正方形$ABCD$中，因为$AE=CF$，所以$BE=DF$且$BE\,/\!/\,DF$. ……
…………………………………………………………………………………………………… 1分



所以四边形$BEDF$为平行四边形， ………………………………………… 2分

从而$BF\,/\!/\,DE$， …………………………………………………………………… 3分

又$BF\not\subset$平面C_1DE，$DE\subset$平面C_1DE， ……………………………………… 4分

所以$BF\,/\!/$平面C_1DE. ……………………………………………………… 5分

(2)解：以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴的正方向建立空间直角坐标系$D-xyz$，如图所示，则$D(0,0,0)$，$E(3,1,0)$，$B(3,3,0)$，$C_1(0,3,3)$． …… 6分

$\overrightarrow{DE}=(3,1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-3,0,3)$. …………………………………………………… 7分

设平面C_1DE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$，即$\begin{cases}3x+y=0,\\3y+3z=0,\end{cases}$ …………………………………………………… 8分

令$x=1$，得$\boldsymbol{n}=(1,-3,3)$. ……………………………………………………………… 9分

因此$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{-3+9}{\sqrt{19}\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{38}}{19}$， ………………………………………… 11分

故BC_1与平面C_1DE所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{38}}{19}$. ……………………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问严格按照解析中的步骤给分.

【2】第(2)问中的法向量不唯一，只要与向量$\boldsymbol{n}=(1,-3,3)$共线即可.

19.解：(1)因为$3a\cos A=b\cos C+c\cos B$，

所以$3\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$， …………………………………………… 1分

即$3\sin A\cos A=\sin(B+C)=\sin A$， ……………………………………………………… 2分

又$\sin A>0$，所以$\cos A=\frac{1}{3}$， ………………………………………………………………… 3分

且$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， …………………………………………………………………………… 4分

故$\cos(A+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A-\sin A)=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$. ………………………………………… 6分

(2)因为$\cos A=\frac{1}{3}>0$，所以A为锐角， ………………………………………………… 7分

又$c>b$，所以$C>B$，

因为$\triangle ABC$为钝角三角形，所以C为钝角. ……………………………………………… 8分

因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=c^2-\frac{4}{3}c+4$， ……………………………………………… 10分

所以$a^2+b^2-c^2=8-\frac{4}{3}c<0$, ……………………………………………………………… 11分

解得$c>6$. ………………………………………………………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问未写 $\sin A>0$(或 $\sin A\neq 0$)而直接得出 $\cos A=\frac{1}{3}$,扣1分.

【2】在第(1)问中,$\cos(A+\frac{\pi}{4})$的结果不对,但是得到 $\cos(A+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A-\sin A)$,扣1分.

20. 解:(1)因为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=2$,所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,即 $b=\sqrt{3}a$. …… 2分

将点 P 的坐标代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$,得$\frac{4}{a^2}-\frac{9}{3a^2}=1$, …… 3分

解得 $a^2=1$,故 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$M(m,0)$,

因为 Q 为 PM 的中点,所以 $y_1=2y_2$. …… 5分

因为直线 l 的斜率为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以可设 l 的方程为 $x=\sqrt{5}y+t$, …… 6分

联立$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ x=\sqrt{5}y+t,\end{cases}$ 得 $14y^2+6\sqrt{5}ty+3(t^2-1)=0$. …… 7分

$\Delta=(6\sqrt{5}t)^2-4\times 14\times 3(t^2-1)=12(t^2+14)>0$, …… 8分

由韦达定理可得 $y_1+y_2=-\frac{3\sqrt{5}t}{7}$,$y_1y_2=\frac{3(t^2-1)}{14}$. …… 9分

因为 $y_1=2y_2$,所以 $y_1+y_2=3y_2=-\frac{3\sqrt{5}t}{7}$,解得 $y_2=-\frac{\sqrt{5}t}{7}$. …… 10分

$y_1y_2=2y_2^2=2\times(-\frac{\sqrt{5}t}{7})^2=\frac{3(t^2-1)}{14}$,解得 $t^2=21$, …… 11分

即 $t=\pm\sqrt{21}$,故 l 的方程为 $x-\sqrt{5}y\pm\sqrt{21}=0$. …… 12分

评分细则:

【1】第(1)问只要写了 $e=\frac{c}{a}=2$ 就给1分.

【2】在第(2)问中,若未写判别式大于0,但写到"由$\frac{\sqrt{5}}{5}<\sqrt{3}$,得 l 与 C 必有两个不同的交点",不扣分. 另外本问还可以通过联立方程消去 y 求解,其过程如下:

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{5}x+t$, …… 5分

联立$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}x+t,\end{cases}$ 得 $14x^2-2\sqrt{5}tx-5(t^2+3)=0$. …… 6分

$\Delta=(2\sqrt{5}t)^2-4\times 14\times[-5(t^2+3)]=60(5t^2+14)>0$. …… 7分

由韦达定理可得 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{5}t}{7}$,$x_1x_2=\frac{-5(t^2+3)}{14}$. …… 8分

因为 Q 为 PM 的中点,所以 $y_1=2y_2$,则 $x_1=2x_2+\sqrt{5}t$. …… 9分

$x_1+x_2=3x_2+\sqrt{5}t=\frac{\sqrt{5}t}{7}$,解得 $x_2=-\frac{2\sqrt{5}t}{7}$,$x_1=\frac{3\sqrt{5}t}{7}$. …… 10分

$x_1x_2=\frac{3\sqrt{5}t}{7}\times(-\frac{2\sqrt{5}t}{7})=\frac{-5(t^2+3)}{14}$,解得 $t^2=\frac{21}{5}$. …… 11分

即 $t=\pm\frac{\sqrt{105}}{5}$,故 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{5}x\pm\frac{\sqrt{105}}{5}$(或 $x-\sqrt{5}y\pm\sqrt{21}=0$). …… 12分

21. 解：(1)设 A 类服装、B 类服装的单件收益分别为 X_1 元，X_2 元，则

$E(X_1)=0.3\times200+0.5\times200\times0.85+0.2\times200\times0.6-120=49$，…………2 分

$E(X_2)=0.2\times300+0.4\times300\times0.85+0.4\times300\times0.6-160=74$，…………4 分

$E(X_1)<E(X_2)$，故 B 类服装单件收益的期望更高．…………5 分

(2)由题意可知，$X\sim B(5,\frac{2}{3})$，…………6 分

$P(X=0)=(\frac{1}{3})^5=\frac{1}{243}$，$P(X=1)=C_5^1(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^4=\frac{10}{243}$，

$P(X=2)=C_5^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^3=\frac{40}{243}$，$P(X=3)=C_5^3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2=\frac{80}{243}$，

$P(X=4)=C_5^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1=\frac{80}{243}$．…………7 分

因为 $P(X<3)=\frac{1+10+40}{243}=\frac{17}{81}<0.5$，$P(X<4)=\frac{1+10+40+80}{243}=\frac{131}{243}>0.5$，…………8 分

所以当 $P(X<n)\leqslant0.5(n\in\mathbf{N})$ 时，n 可取的最大值为 3．…………9 分

$Y=(200\times0.85-120)(5-X)+(300\times0.85-160)X=250+45X$(元)，…………10 分

因为 $E(X)=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$，…………11 分

所以 $E(Y)=E(250+45X)=250+45E(X)=400$(元)．…………12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，$E(X_1)$的计算式子写对了，结果算错了，扣 1 分；$E(X_2)$的计算式子写对了，结果算错了，扣 1 分．

【2】第(2)问没有分别计算 $X=0,1,2,3,4$ 的概率，但写了 $P(X<3)=\frac{1+10+40}{243}=\frac{17}{81}<0.5$，$P(X<4)=\frac{1+10+40+80}{243}=\frac{131}{243}>0.5$，不扣分．$Y$ 和期望 $E(Y)$ 都要带单位，没有带单位共扣 1 分．

22. (1)解：因为 $f'(x)=ax(2\ln x+1)$，…………1 分

所以 $f'(1)=a=2$．…………2 分

又 $f(1)=b=0$，所以 $a+b=2$．…………3 分

当 $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{\sqrt{e}}{e}<x<2$ 时，$f'(x)>0$．…………4 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,a+b)$ 内的单调递减区间为 $(0,\frac{\sqrt{e}}{e})$，单调递增区间为 $(\frac{\sqrt{e}}{e},2)$．…………5 分

(2)证明：由(1)知 $f(x)+g(x)=2x^2\ln x+x^2(e^x-x^2)-2e^x\ln x=(e^x-x^2)(x^2-2\ln x)$．…………6 分

设函数 $\phi(x)=x^2-2\ln x$，则 $\phi'(x)=2x-\frac{2}{x}$．

当 $0<x<1$ 时，$\phi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\phi'(x)>0$，所以 $\phi(x)\geqslant\phi(x)_{\min}=\phi(1)=1$．…………7 分

所以 $f(x)+g(x)\geqslant e^x-x^2$．…………8 分

设函数 $h(x)=e^x-x^2(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-2x(x>0)$，设 $p(x)=e^x-2x(x>0)$，

则 $p'(x)=e^x-2(x>0)$，令 $p'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，…………9 分

则 $p(x)_{\min}=p(\ln 2)=2(1-\ln 2)>0$，…………10 分

所以 $h'(x)>0$，从而 $h(x)$ 为增函数，则 $h(x)>h(0)=1$，…………11 分

因此 $f(x)+g(x)\geqslant e^x-x^2>1$，故 $f(x)+g(x)>1$．…………12 分

评分细则：

【1】第(1)问求导正确、求出 a 的值、求出 b 的值各给 1 分．

【2】第(2)问中，求 $\phi(x)$ 的最小值时，没有写"当 $0<x<1$ 时，$\phi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\phi'(x)>0$"，但得出 $\phi(x)\geqslant\phi(x)_{\min}=\phi(1)=1$，不扣分．