东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学

# 2024届高三第一次六校联考数学参考答案

**一、单选题，二多选题：**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | A | C | B | C | B | A | D | AC | BC | BD | ABD |

**三、填空题（第16题第一问2分，第二问3分）**

13. $7.85$　　14. $240x^6$　　15. $-2$　　16. $x^2+y^2=3$，$5-\sqrt{3}\le r\le 5+\sqrt{3}$

**四．解答题**

17. 解：（1）解法一：因为数列$\{b_n\}$是以1为首项，公比为3的等比数列，

所以$b_n=3^{n-1}$，因为$(n+1)a_n=n^2-8n+k$，所以$a_1=\frac{k-7}{2}$，$a_2=\frac{k-12}{3}$，$a_3=\frac{k-15}{4}$.

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，

所以$2a_2=a_1+a_3$，即$2\times\frac{k-12}{3}=\frac{k-7}{2}+\frac{k-15}{4}$，解得$k=-9$

所以$(n+1)a_n=n^2-8n-9=(n+1)(n-9)$，所以$a_n=n-9$.　…………5分

解法二：因为数列$\{b_n\}$是以1为首项，公比为3的等比数列，所以$b_n=3^{n-1}$，

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，设公差为$d$，则$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$.

所以$(n+1)a_n=(n+1)(dn+a_1-d)=dn^2+a_1n+a_1-d=n^2-8n+k$，

所以$\begin{cases}d=1\\a_1=-8\\k=-9\end{cases}$，所以$a_n=n-9$.　…………5分

（2）因为$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{n-9}{3^{n-1}}$，…………6分

当$n\le 8$时，$c_n<0$；当$n=9$时，$c_n=0$；当$n\geqslant 10$时，$c_n>0$.

当$n\geqslant 10$时，$c_{n+1}-c_n=\frac{n-8}{3^n}-\frac{n-9}{3^{n-1}}=\frac{19-2n}{3^n}<0$，即，$c_{n+1}<c_n$.

所以数列$\{c_n\}$的最大项是第10项$c_{10}=\frac{1}{3^9}$. …………10分

18．解：（1）在$\triangle BCD$中，$BD=2,BC=3,CD=\sqrt{7}$，

由余弦定理可知$\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2\times BC\times BD}=\frac{4+9-7}{2\times 3\times 2}=\frac{1}{2}$，

因为$0<B<\pi$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………3分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin B=3\sqrt{3}$； …………5分

（2）在$\triangle ACD$中，设$\angle ACD=\theta,\angle BAC=2\theta$，则由正弦定理$\frac{CD}{\sin 2\theta}=\frac{AD}{\sin\theta}$，

即$\frac{\sqrt{7}}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$，得$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\because\theta\in(0,\pi)$，所以$\sin\theta=\frac{3}{4}$， …………7分

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8},\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{1}{8}$， …………8分

所以$\angle ADC=\pi-\theta-2\theta$，

所以$\sin\angle ADC=\sin(\theta+2\theta)=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$， …………10分

由正弦定理得：$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，即$AC=\frac{2\times\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$. …………12分

19．解：(1) 证明：因为$BC//$平面$PAD$，$BC\subset$平面$ABCD$，且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，所以$BC//AD$. …………2分

取$PA$的中点$F$，连接$BF$、$EF$，

因为$E$是棱$PD$的中点，所以，$EF//AD$且$EF=\frac{1}{2}AD$， …………3分

因为$BC//AD$且$BC=\frac{1}{2}AD$，所以，$EF//BC$且$EF=BC$，

所以，四边形$BCEF$为平行四边形，则$CE//BF$，

因为$CE\not\subset$平面$PAB$，$BF\subset$平面$PAB$，所以$CE//$平面$PAB$. …………5分

(2) 取$AD$的中点$O$，连接$PO$.

因为$\triangle PAD$是正三角形，所以$PO\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $PO\subset$ 平面 $PAD$，

所以， $PO\perp$ 平面 $ABCD$，…………7 分

因为 $BC//AD$， $BC=\frac{1}{2}AD$， $O$ 为 $AD$ 的中点，所以， $BC//AO$ 且 $BC=AO$，

所以，四边形 $ABCO$ 为平行四边形，则 $CO//AB$，

因为 $AB\perp AD$，则 $CO\perp AD$，

以点 $O$ 为坐标原点， $OC$、$OD$、$OP$ 所在直线分别为 $x$、$y$、$z$ 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$、$C(1,0,0)$、$P(0,0,\sqrt{3})$、$D(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，

设 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DP}=\lambda(0,-1,\sqrt{3})=(0,-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=(0,2,0)+(0,-\lambda,\sqrt{3}\lambda)=(0,2-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

设平面 $ACE$ 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x_1+y_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(2-\lambda)y_1+\sqrt{3}\lambda z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=2-\lambda$，得 $\vec{n}=(\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda,2-\lambda)$，…………9 分

设点 $B$ 到平面 $ACE$ 距离为 $d$， $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{7\lambda^2-4\lambda+4}}$.

当 $\lambda=0$ 时， $d=0$；…………10 分

当 $0<\lambda\leq1$ 时， $\frac{1}{\lambda}\geq1$，则 $0<d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7-\frac{4}{\lambda}+\frac{4}{\lambda^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)^2+6}}\leq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+6}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

当且仅当 $\lambda=1$ 时等号成立.

综上，点 $B$ 到平面 $ACE$ 距离的取值范围是 $\left[0,\frac{\sqrt{21}}{7}\right]$. …………12 分

20．解：（1）由题意得列联表如下：

| | 一等品 | 非一等品 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 甲 | 75 | 25 | 100 |
| 乙 | 48 | 32 | 80 |
| 合计 | 123 | 57 | 180 |

…………2 分

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{180\times(75\times32-48\times25)^2}{123\times57\times100\times80}\approx4.621\text{，}$$ ……3 分

$\because 4.621>3.841=x_{0.05}$，

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为零件是否为一等品与生产线有关联. …4 分

（2）由已知任取一个甲生产线零件为一等品的概率为 $\frac{23+28+24}{100}=\frac{3}{4}$，

任取一个乙生产线零件为一等品的概率为 $\frac{15+17+16}{80}=\frac{3}{5}$， …………5 分

$\xi$ 的所有可能取值为 $0,1,2$，则

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$，$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

$\therefore\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{9}{20}$ |

$E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}=\frac{27}{20}$. …………8 分

（3）由已知零件为三等品的频率为 $\frac{4+2+2+1}{180}=\frac{1}{20}$，

设余下的 40 个零件中三等品个数为 $X$，则 $X\sim B\left(40,\frac{1}{20}\right)$，

$\therefore E\left(X\right)=40\times\frac{1}{20}=2$，………9 分

设检验费用与赔偿费用之和为$Y$，若不对余下的所有零件进行检验，则$Y=20\times5+120X$，

所以$E\left(Y\right)=100+120\times E\left(X\right)=100+240=340$，…………11 分

若对余下的所有零件进行检测，则检验费用为$60\times5=300$元，

$\because 340>300$，　$\therefore$应对剩下零件进行检验. …………12 分

21．解：(1)由题意知$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，四边形$B_1F_1B_2F_2$为菱形，面积为$2\sqrt{3}$，即$2bc=2\sqrt{3}$，

又$a^2=c^2+b^2$，解得$a^2=4$，$b^2=1$，$c^2=3$，…………3 分

所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$． …………4 分

(2)设$M(m,0)$，直线$AB$的方程为$x=ty+m$，　$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$得$y_1=-2y_2$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ty+m,\end{cases}$得$(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$，

$\Delta=(2tm)^2-4(t^2+4)(m^2-4)=-16(m^2-t^2-4)$，…………6 分

则$y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}$，由$y_1y_2=-2y_2^2$，$y_1+y_2=-2y_2+y_2=-y_2$，

得$y_1y_2=-2\left[-\left(y_1+y_2\right)\right]^2=-2\left(y_1+y_2\right)^2$，所以$\frac{m^2-4}{t^2+4}=-2\left(-\frac{2tm}{t^2+4}\right)^2$，……8 分

化简得$(m^2-4)(t^2+4)=-8t^2m^2$，易知原点$O$到直线$AB$的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}$，

又直线$AB$与圆$O:x^2+y^2=\frac{4}{7}$相切，所以$\frac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{\frac{4}{7}}$，即$t^2=\frac{7}{4}m^2-1$，……10 分

由$\begin{cases}(m^2-4)(t^2+4)=-8t^2m^2\\ t^2=\frac{7}{4}m^2-1\end{cases}$，得$21m^4-16m^2-16=0$，即$(3m^2-4)(7m^2+4)=0$，

解得 $m^2=\dfrac{4}{3}$，则 $t^2=\dfrac{4}{3}$，满足 $\Delta>0$，所以 $M\left(\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$，

在 $Rt\Delta OMN$ 中，$|MN|=\sqrt{\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{7}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$． …………12 分

22．解：(1) 由题意，当 $a=1$ 时，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则 $h(x)=x^2-x+1-\ln x-1=x^2-x-\ln x(x>0)$，

$h'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$（舍负），…………2 分

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=0$． …………4 分

根据题意 $t$ 的取值范围为 $(0,1]$…………5 分

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处与函数 $g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处有相同的切线，

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，$\therefore 2x_1-a=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a}{x_1-x_2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{2x_2}+\dfrac{a}{2}$，代入 $\dfrac{x_1-x_2}{x_2}=x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a$ ………6 分

得 $\dfrac{1}{4x_2^2}+\dfrac{a}{2x_2}+\ln x_2+\dfrac{a^2}{4}+a-2=0$

$\therefore$ 问题转化为：关于 $x$ 的方程 $\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{a}{2x}+\ln x+\dfrac{a^2}{4}+a-2=0$ 有解，………7 分

设 $F(x)=\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{a}{2x}+\ln x+\dfrac{a^2}{4}+a-2(x>0)$，则函数 $F(x)$ 有零点，

$\because F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+a\right)^2+\ln x+a-2$，当$x=e^{2-a}$时，$\ln x+a-2=0,\therefore F\left(e^{2-a}\right)>0$.

$\therefore$问题转化为：$F(x)$的最小值小于或等于 0. ………8 分

$F'(x)=-\frac{1}{2x^3}-\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax-1}{2x^3}$，

设$2x_0^2-ax_0-1=0\left(x_0>0\right)$，则

当$0<x<x_0$时，$F'(x)<0$，当$x>x_0$时，$F'(x)>0$.

$\therefore F(x)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递减，在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore F(x)$的最小值为$F\left(x_0\right)=\frac{1}{4{x_0}^2}+\frac{a}{2x_0}+\ln x_0+\frac{a^2}{4}+a-2$.

由$2x_0^2-ax_0-1=0$知$a=2x_0-\frac{1}{x_0}$，

故$F\left(x_0\right)=x_0^2+2x_0-\frac{1}{x_0}+\ln x_0-2$……….10 分

设$\varphi(x)=x^2+2x-\frac{1}{x}+\ln x-2(x>0)$，

则$\varphi'(x)=2x+2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$，故$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\because \varphi(1)=0,\therefore$当$x\in(0,1]$时，$\varphi(x)\le 0$，

$\therefore F(x)$的最小值$F\left(x_0\right)\le 0$等价于$0\le x_0\le 1$.

又$\because$函数$y=2x-\frac{1}{x}$在$(0,1]$上单调递增，

$\therefore a=2x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\infty,1]$…….12 分

# 关于我们